

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 2 maggio 1926.

V. VOLTERRA, presidente

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Sulle distorsioni elastiche.* Nota del Corrispondente P. BURGATTI⁽¹⁾.

1. Considerando un solido elastico isotropo (S) limitato dalla superficie (σ), in equilibrio in uno stato di *distorsione* infinitesima, indichiamo con $\mathbf{s}(P)$ lo spostamento del generico punto P, con β l'omografia delle tensioni elastiche e con $[\mathbf{s}]$ la discontinuità di \mathbf{s} lungo una superficie (ω). Com'è noto, le distorsioni furono considerate la prima volta e magistralmente studiate da Volterra⁽²⁾, indi generalizzate da Somigliana⁽³⁾. Qui esse sono intese nel senso più generale indicato da quest'ultimo autore.

L'equazioni per l'equilibrio, mancando le forze esterne, sono

$$(1) \text{ in } (S) \quad \text{grad } \beta = 0 \quad , \quad \beta = -l I_1 \alpha - 2m D \frac{d\mathbf{s}}{dP} \quad , \quad \alpha = \frac{d\mathbf{s}}{dP}$$

$$(2) \text{ su } (\sigma) \quad \beta \mathbf{n} = 0 \quad , \quad \text{su } (\omega) \quad [\mathbf{s}] = \mathbf{s}_\omega \quad , \quad [\beta \mathbf{n}'] = 0 \quad ,$$

ove \mathbf{n} e \mathbf{n}' sono i vettori unitari che definiscono le normali in un punto generico di (σ) e (ω), e \mathbf{s}_ω è la data discontinuità. L'ultima equazione esprime la continuità delle tensioni elastiche attraverso a (ω); le lettere l e m indicano le costanti di Lamè.

(1) Presentata nella seduta del 18 aprile 1926.

(2) *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*, « Ann. Ec. Normale », S. III, t. 2-4, 1907.

(3) *Sulla teoria delle distorsioni elastiche*, « Rend. Acc. Lincei », 1914.

Il Volterra ricondusse la risoluzione di questo problema a quella di un ordinario problema d'equilibrio elastico. Sia \mathbf{s}_0 uno spostamento soddisfacente all'equazioni scritte, ma non alla condizione in superficie $\beta_0 \mathbf{n} = 0$ (ne esistono infiniti). Si ponga

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s} - \mathbf{s}_0;$$

ne viene

$$\text{su } (\omega) \quad [\mathbf{s}_1] = 0 \quad [\beta_1 \mathbf{n}'] = 0 \quad , \quad \beta_1 \mathbf{n} = -\beta_0 \mathbf{n} \neq 0 \quad \text{su } (\sigma),$$

insieme alle (1) (posti gli indici alle lettere $\mathbf{s}, \alpha, \beta$).

Cosicchè \mathbf{s}_1 definisce una deformazione *regolare* equilibrata dalle forze superficiali $-\beta_0 \mathbf{n}$. Si rientra dunque nella teoria ordinaria. Trovato \mathbf{s}_1 , lo spostamento $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_0$ definisce la distorsione cercata.

Orbene, io mi propongo di mostrare qui come si possa risolvere il detto problema direttamente; o meglio, come sia possibile stabilire per le distorsioni delle formule analoghe a quelle note sotto il nome di *formule di Somigliana* negli ordinari problemi d'equilibrio elastico. Di quest'ultime io m'occupai già in due Note del 1914 nei « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei ». Al metodo ivi adottato si ricollega la presente ricerca.

2. Nelle Note citate io ho stabilito due formule che sono fondamentali nelle ricerche di fisica-matematica. Mi occorre trascriverle qui:

$$(I) \quad \int_S (\text{grad } \beta \times \mathbf{s}_1 - \text{grad } \beta_1 \times \mathbf{s}) dS = \int_{\sigma} (\beta_1 \mathbf{n} \times \mathbf{s} - \beta \mathbf{n} \times \mathbf{s}_1) d\sigma$$

$$(II) \quad \mathbf{s}(M) \times \mathbf{c} = \int_{\sigma} (\beta \mathbf{n} \times \mathbf{s}_1 - \beta_1 \mathbf{n} \times \mathbf{s}) d\sigma + \\ + \int_S \text{grad } \beta \times \mathbf{s}_1 dS \quad , \quad \mathbf{c} = \lim_{\varepsilon=0} \int_{\Omega} \beta_1 \mathbf{n}' d\Omega,$$

ove gli spostamenti \mathbf{s} e \mathbf{s}_1 e le dilatazioni β e β_1 sono regolari e soddisfano alla condizione

$$(III) \quad I_1 \left(\beta \frac{d\mathbf{s}_1}{dP} \right) = I_1 \left(\beta_1 \frac{d\mathbf{s}}{dP} \right).$$

Nella 2ª formula però è $\text{grad } \beta_1 = 0$, e β_1 diventa infinita in M , per modo che esista il limite finito sopra indicato, essendo (Ω) la superficie sferica di centro M e raggio ε . La 1ª formula con la condizione (III) costituisce la forma più generale del principio di reciprocità⁽¹⁾. Essa si deduce integrando nello spazio S la relazione

$$\text{div } \beta_1 \mathbf{s} = I_1 \left(\beta_1 \frac{d\mathbf{s}}{dP} \right) + \text{grad } \beta_1 \times \mathbf{s}$$

(1) Vedi in proposito una Memoria del prof. LELLI negli « Annali di matematica », 1925.

e l'analoga con gl'indici invertiti; poi applicando il teorema della divergenza. La 2^a formula si deduce dalla prima, introducendo le ipotesi suindicate.

Orbene, quando $\beta_i \mathbf{s}$ è discontinuo attraverso a una superficie (ω) interna ad S , l'applicazione del teorema della divergenza dà un termine in più relativo alla discontinuità, e si ha precisamente

$$\int_S \text{grad } \beta_i \times \mathbf{s} dS = - \int_S I_i \left(\beta_i \frac{d\mathbf{s}}{dP} \right) dS - \\ - \int_{\omega} \beta_i \mathbf{n} \times \mathbf{s} d\sigma - \int_{\omega} [\beta_i \mathbf{s}] \times \mathbf{n}' d\omega.$$

Se la discontinuità di $\beta_i \mathbf{s}$ dipende solo da \mathbf{s} , l'ultimo integrale può anche scriversi nella forma

$$\int_{\omega} \beta_i \mathbf{n}' \times [\mathbf{s}] d\omega.$$

Salvo quest'ultimo cambiamento, la formula vale ancora sostituendo β e \mathbf{s}_i a β_i e \mathbf{s} . Ne segue che nella (I), e quindi nella (II), compariranno al secondo membro anche i due integrali

$$- \int_{\omega} [\beta_i \mathbf{n}'] \times \mathbf{s}_i d\omega + \int_{\omega} \beta_i \mathbf{n}' \times [\mathbf{s}] d\omega.$$

Ma se è, come si suppone adesso, $[\beta \mathbf{n}'] = 0$, comparirà in più soltanto il secondo integrale. Avremo dunque la formula

$$(IV) \quad \mathbf{s}(M) \times \mathbf{c} = \int_{\sigma} (\beta \mathbf{n} \times \mathbf{s}_i - \beta_i \mathbf{n} \times \mathbf{s}) d\sigma + \\ + \int_S \text{grad } \beta \times \mathbf{s}_i dS + \int_{\omega} \beta_i \mathbf{n}' \times [\mathbf{s}] d\omega.$$

Questa va ora applicata al caso delle equazioni (1) e (2), seguendo la stessa via che già indicai nelle Note citate per giungere ad una forma espressiva delle formule di Somigliana.

Per \mathbf{s}_i si prende lo spostamento fondamentale soddisfacente alla (1)

$$\mathbf{s}_i = \gamma \mathbf{a} = \left[\frac{2b^2}{r} - (b^2 - a^2) \frac{d \text{grad } r}{dl} \right] \mathbf{a} \quad \left(\frac{l + 2m}{\rho} = b^2, \quad \frac{m}{\rho} = a^2 \right)$$

ove \mathbf{a} è costante, $r = \text{mod}(P - M)$; poi si calcola la dilatazione β_i corrispondente e il vettore limite $\mathbf{c}^{(1)}$. Si ottiene

$$\mathbf{c} = 8\pi\rho a^2 b^2 \mathbf{a}. \quad (\rho \text{ densità})$$

(1) Per non ripetere qui il calcolo, rimando alle mie Note citate.

Introducendo poi l'omografia

$$\lambda = 2 a^4 \left(\text{grad } \frac{1}{r} \wedge \mathbf{n} \right) \wedge - 2 a^2 b^2 H \left(\mathbf{n}, \text{grad } \frac{1}{r} \right) - \\ - 2 a^2 (b^2 - a^2) H \left(\frac{d \text{grad } \frac{1}{r}}{dl} \mathbf{n}, P - M \right),$$

si trova

$$\frac{1}{\rho} \beta_i \mathbf{n} = \lambda \mathbf{a}.$$

Dopo ciò, tenendo conto delle (1) e (2), subito si deduce per l'arbitrarietà di \mathbf{a}

$$(V) \quad 8 \pi a^2 b^2 \mathbf{s}(M) = - \int_{\sigma} K \lambda \mathbf{s} \cdot d\sigma - \int_{\omega} K \lambda \mathbf{s}_{\omega} \cdot d\omega,$$

ove $K\lambda$ è la coniugata di λ . È la formula cercata. Essa dà il valore dello spostamento in un punto M per mezzo degli spostamenti in superficie e della discontinuità.

In taluni casi si potrà con l'aiuto delle funzioni o delle omografie di Green eliminare gli spostamenti su (σ) , che sono un dato soverchio.

3. Colgo ora l'occasione per dedurre dalle formule accennate un importante teorema generale. Supponiamo che il vettore \mathbf{s} sia discontinuo attraverso a una superficie (ω) . Come si è visto, la formula (I) si modifica e diventa

$$(I) \quad \int_S (\text{grad } \beta \times \mathbf{s}_i - \text{grad } \beta_i \times \mathbf{s}) dS = \int_{\sigma} (\beta_i \mathbf{n} \times \mathbf{s} - \beta \mathbf{n} \times \mathbf{s}_i) d\sigma + \\ + \int_{\omega} (\beta_i \mathbf{n}' \times [\mathbf{s}] - [\beta \mathbf{n}'] \times \mathbf{s}') d\omega.$$

Ora interpretiamo \mathbf{s}_i come lo spostamento continuo di una deformazione regolare equilibrata da un sistema di forze, e β_i come la corrispondente dilatazione degli sforzi interni; talchè sarà

$$\text{grad } \beta_i = \rho \mathbf{F}_i \quad \beta_i \mathbf{n} = \rho \mathbf{f}_i. \quad (\text{su } \sigma)$$

Poi consideriamo \mathbf{s} come lo spostamento in una distorsione ottenuta per mezzo d'un taglio lungo (ω) e della creazione della discontinuità $[\mathbf{s}]$; β come la corrispondente omografia delle tensioni elastiche; cosicchè si avrà

$$\text{grad } \beta = 0 \quad , \quad \beta \mathbf{n} = 0 \quad , \quad [\beta \mathbf{n}'] = 0 \quad , \quad [\mathbf{s}] = \mathbf{s}_{\omega}.$$

In base a queste condizioni la (I') diventa

$$\int_S \rho \mathbf{F}_i \times \mathbf{s} dS + \int_\sigma \rho \mathbf{f}_i \times \mathbf{s} d\sigma + \int_\omega \beta_i \mathbf{n}' \times \mathbf{s}_\omega d\omega = 0.$$

Questa relazione dimostra che in una deformazione regolare equilibrata da un sistema di forze, le tensioni elastiche che nascono lungo una superficie (ω) son tali che il lavoro che eseguirebbero qualora, facendo un taglio lungo (ω), si creasse una distorsione caratterizzata da \mathbf{s}_ω , risulterebbe uguale al lavoro che compirebbe il dato sistema di forze nel passaggio del solido dallo stato naturale alla configurazione definita da quella distorsione.

Come corollario di questo teorema, conseguenza immediata della (I'), si deduce subito quello che il prof. Colonnetti chiamò il secondo principio di reciprocità ⁽¹⁾.

Matematica. — *Sulla quadratura della superficie.* Nota del Corrisp. L. TONELLI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Idromeccanica. — *Effetti dinamici di un fluido che circola tra quantisivogliano cilindri sottili ad assi paralleli.* Nota del Corrisp. U. CISOTTI ⁽²⁾.

I. - SOLUZIONE ANALITICA. — Sia $z = x + iy$ la variabile complessa del piano di n circonferenze complanari $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, tutte esterne una all'altra, coi centri nei punti di affisse z_1, z_2, \dots, z_n e di raggi r_1, r_2, \dots, r_n ; si ponga:

$$(I) \quad z_j - z_k = \rho_{kj} e^{i\theta_{kj}} \quad , \quad (j, k = 1, 2, \dots, n \ ; \ k \neq j),$$

con che $\rho_{kj} = \rho_{jk}$ rappresenta la distanza dei centri z_j e z_k e θ_{kj} l'angolo che la retta dei centri $z_k \rightarrow z_j$ forma coll'asse reale. Detto r il maggiore dei raggi r_1, r_2, \dots, r_n e ρ la minima delle distanze ρ_{kj} si supponga che il rapporto $\frac{r}{\rho}$ sia quantità di primo ordine, per cui sia lecito di trascurare i quadrati dei rapporti di uno qualunque dei raggi a una qualunque delle

(1) *Principii di statica dei solidi elastici*, p. 262 e seg.

(2) Presentata nella seduta del 21 marzo 1926.

distanze dei centri, i prodotti, ecc. In queste circostanze ho fatto rilevare, in una precedente Nota ⁽¹⁾, che la funzione:

$$(2) \quad f(\zeta) = -i \sum_k^n \left\{ e_k \log(\zeta - \zeta_k) - \frac{c_k}{\zeta - \zeta_k} \right\},$$

in cui e_1, e_2, \dots, e_n sono n costanti reali, *a priori* arbitrarie, e le costanti c_1, c_2, \dots, c_n , risultano legate alle precedenti dalle relazioni ⁽²⁾:

$$(3) \quad c_j = r_j^2 \sum_k^n \frac{e_k^{(j)}}{\rho_{kj}} e^{i\theta_{kj}},$$

considerate nella regione illimitata del piano ζ , esterna alle n circonferenze $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, è tale che, posto $f = \varphi + i\psi$, la funzione ψ si comporta come un potenziale elettrostatico, assumente su γ_j il valore costante:

$$(4) \quad \psi_j = -e_j \log r_j - \sum_k^n e_k \log \rho_{kj}.$$

Le costanti e_j , nel problema elettrostatico accennato, rappresentano le cariche dei conduttori $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, supposti elettrizzati.

Noi vogliamo ora mettere in rilievo una notevole interpretazione idromeccanica di cui è suscettibile la (2). Derivandola, si ha:

$$(5) \quad w = \frac{df}{d\zeta} = -i \sum_k^n \left\{ \frac{e_k}{\zeta - \zeta_k} + \frac{c_k}{(\zeta - \zeta_k)^2} \right\}.$$

Questa definisce la velocità in un moto piano permanente e regolare nella regione esterna ai profili circolari $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ e che diviene evanescente all'infinito; i profili circolari si comportano come pareti rigide.

2. — CIRCOLAZIONI. — Allo scopo di chiarire il significato idromeccanico della costante e_j , valutiamo la circolazione relativa al profilo γ_j ; essa è definita dal seguente integrale ⁽³⁾

$$\int_{\gamma_j} w d\zeta,$$

(1) Campo elettrostatico dovuto a un qualunque numero di sottili conduttori elettrizzati di forma cilindrica e ad assi paralleli [Questi « Rend. », vol. III, p. 289].

(2) Il simbolo \sum_k^n esprime che si deve fare la somma dei termini che si ottengono attribuendo a k tutti i valori da 1 a n , eccettuato j .

(3) CISOTTI, Effetto dinamico di una corrente che fluisce tra un cilindro e una parete piana indefinita [Questi « Rend. », vol. I (1925), p. 497].

l'integrazione andando effettuata, lungo la circonferenza γ_j , in modo da lasciare alla sinistra l'area circolare da essa racchiusa. Per la (5), il predetto integrale ha per valore $2\pi e_j$; dunque $2\pi e_j$ è la circolazione relativa alla corrente che ciruisce il profilo γ_j .

3. — AZIONI DINAMICHE. — Se R_x e R_y designano le componenti della risultante delle pressioni dinamiche esercitate dal fluido sul profilo γ_j e M il relativo momento (normale al piano del moto e sinistrorso) rispetto al centro z_j di γ_j , si hanno le formole di Blasius⁽¹⁾:

$$(6) \quad R_y^{(j)} + iR_x^{(j)} = -\frac{i}{2} \int_{\gamma_j} w^2 d\bar{z} \quad , \quad M^{(j)} = -\frac{i}{2} \text{ parte reale di } \int_{\gamma_j} w^2 (z - z_j) d\bar{z}.$$

Convenendo di mettere in evidenza nella (5) i termini corrispondenti a $k = j$, si ottiene:

$$w = -i \left\{ \frac{e_j}{z - z_j} - \frac{c_j}{(z + z_j)^2} + \sum_{k \neq j}^{(j)} \left(\frac{e_k}{z - z_k} + \frac{c_k}{(z - z_k)^2} \right) \right\}$$

dalla quale, elevando a quadrato e tenendo presente che i quadrati e i prodotti di c_1, c_2, \dots, c_n sono trascurabili, si deduce:

$$w^2 = -\frac{e_j^2}{(z - z_j)^2} + \frac{2e_j c_j}{(z - z_j)^3} - \left\{ \sum_{k \neq j}^{(j)} \left(\frac{e_k}{z - z_k} + \frac{c_k}{(z - z_k)^2} \right) \right\}^2 - \\ - \frac{2e_j}{z - z_j} \sum_{k \neq j}^{(j)} \left(\frac{e_k}{z - z_k} + \frac{c_k}{(z - z_k)^2} \right) + \frac{2c_j}{(z - z_j)^2} \sum_{k \neq j}^{(j)} \frac{e_k}{z - z_k}.$$

Essendo su γ_j :

$$z - z_j = r_j e^{i\sigma} \quad (0 \leq \sigma \leq 2\pi),$$

$$z - z_k = z_j - z_k + r_j e^{i\sigma} = \rho_{kj} e^{i\theta_{kj}} + r_j e^{i\sigma} = \rho_{kj} e^{i\theta_{kj}} \left\{ 1 + \frac{r_j}{\rho_{kj}} e^{i(\sigma - \theta_{kj})} \right\},$$

si ha, a meno di quantità di ordine superiore,

$$(7) \quad \int_{\gamma_j} w^2 d\bar{z} = -2e_j \int_{\gamma_j} \frac{d\bar{z}}{z - z_j} \sum_{k \neq j}^{(j)} \frac{e_k}{z - z_k} = -4\pi i e_j \sum_{k \neq j}^{(j)} \frac{e_k}{\rho_{kj}} e^{-i\theta_{kj}};$$

inoltre:

$$\int_{\gamma_j} w^2 (z - z_j) d\bar{z} = -e_j^2 \int_{\gamma_j} \frac{d\bar{z}}{z - z_j} + 2c_j \int_{\gamma_j} \frac{d\bar{z}}{z - z_j} \sum_{k \neq j}^{(j)} \frac{e_k}{z - z_k},$$

(1) Cfr. la mia *Idromeccanica piana*, Parte seconda [Milano, Tamburini, 1922, p. 169] e la Nota *Azioni dinamiche di una corrente piana che investe due profili circolari convenientemente distanti tra di loro* [Questi « Rend. », vol. III, p. 53].

ovvero, per essere $\frac{e_j}{\rho_{kj}}$ di second'ordine:

$$\int_{\gamma_j} w^2 (z - z_j) dz = -2\pi i e_j^2.$$

Per questa e per la (7), dalla (6) si ricavano le seguenti formule:

$$(8) \quad R_x^{(j)} = 2\pi e_j \sum_k^{(j)} \frac{e_k}{\rho_{kj}} \cos \theta_{kj}, \quad R_y^{(j)} = 2\pi e_j \sum_k^{(j)} \frac{e_k}{\rho_{kj}} \sin \theta_{kj}, \quad M = 0.$$

Nel caso particolare di $n = 2$, ponendo:

$$\rho_{12} = \rho_{21} = \rho \quad \text{e} \quad \theta_{21} = \theta_{12} + \pi = \theta + \pi,$$

si ha:

$$R_x^{(1)} = -2\pi \frac{e_1 e_2}{\rho} \cos \theta, \quad R_y^{(1)} = -2\pi \frac{e_1 e_2}{\rho} \sin \theta;$$

$$R_x^{(2)} = 2\pi \frac{e_1 e_2}{\rho} \cos \theta, \quad R_y^{(2)} = 2\pi \frac{e_1 e_2}{\rho} \sin \theta;$$

si ritrova così un risultato incluso in altro da me già stabilito⁽¹⁾.

4. - PORTATE. — La portata q_{jk} della corrente che fluisce tra γ_j e γ_k è $\psi_j - \psi_k$, ovvero, per la (4):

$$q_{jk} = e_k \log \frac{r_k}{\rho_{kj}} - e_j \log \frac{r_j}{\rho_{kj}}.$$

Astronomia. — *Sul catalogo ortografico di Catania.* Nota del
Corrisp. A. BEMPORAD.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Azioni dinamiche di una corrente piana che investe due profili circolari convenientemente distanti tra di loro [Questi « Rend. », loc. cit., p. 54] formula (11) nella quale si faccia $V = 0$. Si rilevi che $C_1 = 2\pi e_1$, $C_2 = 2\pi e_2$. Colgo l'occasione per far rilevare che le formule (III) della nota citata vanno modificate scrivendo: $M^{(1)} = M^{(2)} = 0$.

Chimica. — *Sulla presenza, in alcuni prodotti dell'attuale attività del Vesuvio, di quantità notevoli di composti di cesio* ⁽¹⁾. Nota del Socio FERRUCCIO ZAMBONINI e del dott. LUCA CONIGLIO ⁽²⁾.

Nel mese di novembre del 1924, la guida Alfonso Sannino raccolse, sul fondo del cratere vesuviano, un grosso frammento di lava, profondamente alterato dalle esalazioni fumaroliche, e ricoperto da sublimazioni di colore variabile dal gialliccio al rossiccio. Qua e là si distinguevano nettamente delle crosticine di zolfo, come pure dell'opale (granulina).

Un esame sommario allo spettroscopio, permise di constatare immediatamente la presenza delle due linee caratteristiche del cesio, di lunghezza d'onda 4555.3 e 4593.2 ⁽³⁾, ambedue intensissime e persistenti. L'identità delle due linee osservate nello spettro della sublimazione vesuviana con quelle del cesio fu posta fuori dubbio mediante il confronto con le linee fornite dal solfato di cesio puro. Delle due righe spettrali su indicate, quella con $\lambda = 4555.3$ era un po' più intensa e persistente dell'altra, precisamente come si verifica nel solfato di cesio.

Data l'intensità delle linee caratteristiche del cesio, era certo che questo elemento doveva trovarsi, nella sublimazione vesuviana esaminata, non, come sovente accade in molti prodotti naturali, in tracce, ma, invece, in quantità relativamente considerevoli.

Il fatto presentava un notevole interesse, perchè il cesio è stato rinvenuto, in piccolissima quantità, da L. Smith ⁽⁴⁾ nella leucite del Vesuvio, ma non pare che sia stato mai osservato nei prodotti delle fumarole vesuviane. È noto, invece, che A. Cossa ⁽⁵⁾ rinvenne cesio, rubidio e tallio nell'allume naturale dell'isola di Vulcano.

Abbiamo incominciato con l'eseguire delle indagini qualitative sulla sublimazione vesuviana contenente il cesio. È stato facile accertare che questo elemento si trova abbondante nella parte solubile a caldo in acqua. Si è, perciò, trattata la sublimazione con acqua calda, aggiungendo un paio di gocce di acido nitrico per evitare i fenomeni di idrolisi. Nella soluzione si è riconosciuta la presenza di cloruri e di solfati, oltre quella del boro e del fluoro. Tra i metalli, si sono riconosciuti rame, piombo, titanio, ferro, alluminio, calcio, magnesio, sodio, potassio e cesio, tutti in piccola quantità,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Napoli.

(2) Presentata nella seduta del 2 maggio 1926.

(3) Per le lunghezze d'onda si danno i valori delle *Wavelength Tables for Spectrum Analysis* compiled by F. TWYMAN. March, 1923. Published by Adam Hilger Ltd.

(4) « Amer. Journ. Sc. », 1870 [2] XLIX, 335.

(5) *Ricerche chimiche e microscopiche su rocce e minerali d'Italia*, 1881, p. 268.

all' infuori dei metalli alcalini, predominanti assai. Con alcune indagini sommarie spettroscopiche si è anche accertata la presenza del bario e dello stronzio. Il titanio è stato confermato da numerose linee nella regione dello spettro compresa fra 4500 e 3200 (I. A.)⁽¹⁾.

La presenza del titanio sotto forma di composti solubili presenta un particolare interesse. Il Brun⁽²⁾ asserisce che i sali del Kilauea contengono molto solfato di titanio, ma, al Vesuvio, solo di recente uno di noi⁽³⁾ ha trovato in modo sicuro una piccola quantità di titanio sotto forma di composto solubile. Nella sublimazione della quale ci stiamo occupando, cento parti di sostanze solubili contengono 0.3 di titanio: non è, perciò, possibile in alcuna maniera di stabilire se si trovi sotto forma di solfato ovvero di titanato. La prima ipotesi, però, è più probabile, specialmente tenendo conto di altre indagini che si stanno eseguendo in questo Laboratorio, in alcune delle quali, dovute al dott. G. Carobbi, che ne renderà conto fra breve, non è dubbio che il titanio si trovi come solfato. Ad ogni modo, le ricerche eseguite su vari prodotti dell'attuale attività del Vesuvio hanno stabilito che il titanio sotto forma di composti solubili, è molto frequente nei miscugli salini delle fumarole vesuviane, fatto, questo, che non era stato, prima d'ora, avvertito.

Si è ritenuto inutile procedere ad una analisi completa della sublimazione vesuviana cesifera, data la sua complessità. Ci siamo limitati alla separazione dei metalli alcalini, che furono dapprima pesati complessivamente come cloruri, poi si determinarono il cesio ed il potassio sotto forma di cloroplatinati. Questi ultimi furono ridotti, e si pesò il platino risultante. I cloruri separati dal platino vennero esaminati accuratamente allo spettroscopio, ma non si riuscì a stabilire con certezza la presenza del rubidio. Anche questo fatto è interessante, perchè, di solito, cesio e rubidio si rinvengono associati. Non mancano, però, esempi di minerali, come i berilli americani studiati da Penfield e Harper⁽⁴⁾, e la pollucite sia di Hebron e di Rumford (secondo, rispettivamente Wells⁽⁵⁾ e H. W. Foote⁽⁶⁾), che dell'isola d'Elba (in base alle analisi di Pisani⁽⁷⁾, di Rammelsberg⁽⁸⁾ e di Grill⁽⁹⁾), nei quali il cesio non è accompagnato dal rubidio, almeno in quantità ap-

(1) Lo spettro d'arco di questa interessante sublimazione vesuviana è in corso di studio ed i risultati saranno ulteriormente comunicati.

(2) *Recherches sur l'hexalaison volcanique*, 1911, pp. 235 e 250.

(3) L. CONIGLIO, *Sulla presenza di solfiti alcalini tra i prodotti dell'attuale attività del Vesuvio*. « Annali R. Osservatorio Vesuviano ». Terza Serie, vol. I, 1924, p. 37. In detta Nota sono anche riportati alcuni dati, non molto precisi, del Palmieri sull'argomento.

(4) « Amer. Journ. Sc. », 1886, XXXII, 110.

(5) « Amer. Journ. Sc. », 1891, XLII, 213.

(6) « Amer. Journ. Sc. », 1896, I, 457.

(7) « Compt. rend. 1864 », LVIII, 714.

(8) « Ber. preuss. Ak. Wiss. », Berlin, 1878, p. 3, 1880. p. 169.

(9) « Processi verbali Società Toscana Scienze Nat. », 1920, XXIX, n. 4.

prezzabili. Anche in alcune acque minerali, come è riferito nel Gmelin-Kraut's *Handbuch der anorganischen Chemie* (1906, II, Abt I, p. 215) si è rinvenuto cesio senza rubidio.

Non contenendo il nostro cloroplatinato altri metalli alcalini che il potassio ed il cesio, era possibile determinare per via indiretta le quantità rispettive di questi due metalli in base al peso del cloroplatinato ed a quello del platino ottenutone in seguito alla riduzione. Si è, così, trovato che in cento parti di miscuglio salino solubile ne erano contenute 11.5 di cesio e 19.4 di potassio.

Questo risultato è abbastanza attendibile, se si pensa che noi siamo partiti da una quantità considerevole di cloroplatinato e, precisamente, da gr. 3.19, dai quali si ricavarono gr. 1.0606 di platino. Ad ogni modo, si è cercato di controllare almeno l'ordine di grandezza del valore trovato per il cesio per via indiretta, cercando di separare il potassio dal cesio nella soluzione dei cloruri ottenuta lisciviando il residuo della riduzione del cloroplatinato.

Veri e propri metodi quantitativi di separazione del cesio e del potassio non sono noti. Quando eseguiamo le nostre ricerche, i tripli alogenuri di Cs (o Rb), Ag e Au scoperti da F. Emich⁽¹⁾ e studiati da E. Bayer⁽²⁾, mentre potevano assai bene adoperarsi per le indagini microchimiche, non davano sicuro affidamento per una separazione quantitativa, visto anche il disaccordo fra il Bayer e H. L. Wells⁽³⁾. Nemmeno oggi, dopo le nuove recentissime esperienze di J. Vogel⁽⁴⁾, può parlarsi di metodi quantitativi, per quanto il fatto che il potassio non dà, secondo Emich, alcun triplo cloruro con Au e Ag, ed il differente comportamento del rubidio e del cesio, dieno luogo a buone speranze per l'avvenire.

Ad ogni modo, desiderando noi semplicemente ottenere una conferma dell'ordine di grandezza del valore trovato per il cesio, ci siamo serviti di un metodo, puramente approssimativo, raccomandato molti anni fa da H. L. Wells⁽⁵⁾, che si fonda sulla solubilità molto diversa in acido cloridrico degli esacloropiombati di potassio e di cesio.

Operando esattamente come consiglia Wells, si è trovato 12.2 % Cs, un valore che può considerarsi sufficientemente concordante con quello ottenuto per via indiretta, e che è, di certo, più esatto. D'altra parte, il metodo di Wells è solamente approssimativo: il solfato di cesio ottenuto dall'esacloropiombato conteneva un poco di potassio, come si riconobbe all'esame spettroscopico, e nel liquido dal quale si era separato il $Cs_2 Pb Cl_6$ si trovava sempre un poco di cesio, svelato nettamente dallo spettroscopio.

(1) « Monatshefte für Chemie », 1918, XXXIX, 775.

(2) « Monatshefte für Chemie », 1920, XLI, 223.

(3) « Am. Journ. Sc. », 1922, IV, 476.

(4) « Monatshefte für Chemie », 1925, XLVI, 265 (pubblicato nel febbraio 1926).

(5) « Zeitsch. anorg. Chemie », 1893, IV, 341.

Ad ogni modo, accettando, come più approssimato, il valore di 11.5 % Cs, si ha che il nostro miscuglio salino conteneva nella sua parte solubile, una quantità di cesio notevolissima, di gran lunga superiore a tutte quelle finora constatate non solo nelle sublimazioni vulcaniche, ma anche in tutti i minerali che contengono cesio, eccezione fatta per la pollucite.

Come è naturale, la composizione dei miscugli salini delle fumarole non è la stessa in tutte le parti del campione. Altra porzione isolata dalla roccia, e diversa dalla prima analizzata per essere quasi completamente solubile in acqua appena acidulata (non rimane che un residuo insolubile di 0.04 % ⁽¹⁾) ha dato 7 % di cesio e 15.2 % di potassio, sempre rispetto a cento parti di sostanza solubile. La quantità di cesio risulta notevolmente inferiore a quella trovata nell'altro campione, ma è sempre molto considerevole. La determinazione è stata pure fatta per via indiretta, in base al peso del cloroplatinato di potassio e cesio ed a quello del platino ricavatone. La precisione raggiunta è, però, minore, perchè le quantità pesate erano molte più piccole (gr. 0.6255 (K, Cs), PbCl₆ e gr. 0.2401 Pt). Le percentuali in peso del potassio e del cesio nelle due analisi stanno fra loro in un rapporto poco diverso, e, cioè, di 1.7 : 1 nella prima e di 2.2 : 1 nella seconda.

Il cesio si trova, senza dubbio, presente nella nostra sublimazione in varie forme di combinazione, difficili assai, per altro, a determinare, dato il numero di elementi presenti, che rende possibili molti composti, e la mancanza quasi completa di nitide forme cristalline nei sali della sublimazione. Tuttavia, uno studio accurato si è intrapreso, e porterà a risultati interessanti, come sarà mostrato in successive Note.

Fisica. — *Risposta ad una critica.* Nota del Socio M. CANTONE ⁽²⁾.

Nel fascicolo del 21 febbraio di questi « Rendiconti » il prof. A. Bemporad ha esposto alcune considerazioni sopra una mia Nota dal titolo *Nuovo metodo di studio sui risultati delle esperienze*, per rilevare: che del metodo basato sull'uso delle derivate si era servito egli stesso in ricerche astronomiche, che è ovvio il criterio di riferirsi all'annullamento della derivata per trovare il valore della variabile cui corrisponda il massimo o il minimo di una funzione, e che in recenti lavori compiuti nell'Istituto fisico di Napoli si era avuta la colpa di non seguire il metodo classico per *derivare* una funzione in base ai semplici valori forniti dalle misure.

(1) Nel primo campione analizzato si aveva un residuo di quasi il 30 %.

(2) Presentata nella seduta dell' 11 aprile 1926.

Quanto al primo appunto debbo dire che il mio richiamo all'uso delle derivate ebbe lo scopo di attirare l'attenzione dei fisici, ed anche dei cultori di statistica, sul profitto che di esse può ricavarsi *in casi nei quali di un'anomalia esiste un cenno, ma in un punto non ben precisato, o non vi è manifesto indizio stando agli ordinari metodi di rappresentazione grafica*, perchè di questa ci si contenta generalmente quando non si arriva a trovare un'espressione analitica per la grandezza in esame, e restano pertanto in ombra, o del tutto ignorate, modalità nelle leggi apparentemente regolari di alcuni fenomeni.

Per ciò che si riferisce al secondo rilievo non vedo perchè si debba tacere, nel caso della Pagliarulo⁽¹⁾, dell'accorgimento avuto di ricorrere alle curve delle derivate allo scopo d'individuare la radiazione per cui si ha il massimo del potere rotatorio di alcune soluzioni di asparagina, quando il lavoro mirava appunto alla ricerca di un eventuale legame fra la legge di variazione del potere rotatorio e quella inerente alla dispersione ordinaria. È forse male sostituire al criterio incerto della semplice ispezione della curva quello più sicuro fornito mediante gli elementi del calcolo, ed adottato questo criterio è forse poco opportuno farne un cenno in un caso in cui la posizione del massimo dava un elemento essenziale per lo studio intrapreso?

E finalmente vengo a parlare del modo di ottenere l'andamento della derivata per la ricerca di un'eventuale anomalia nella legge di dispersione o in quella della variazione termica della resistenza del nichel. In verità il Bemporad, pur non volendo aspettare che fosse pubblicato il lavoro della signorina Pagliarulo, non avea motivo di attribuire agli autori delle ricerche cui io mi riferivo *la valutazione dell'inclinazione α della tangente in vari punti del diagramma o di far dipendere il calcolo della derivata dell'apprezzamento di un triangolo infinitesimo che il disegnatore s'illude forse di poter leggere con maggiore esattezza sopra una scala più grande*. Invece di tutto questo bastava che egli tenesse presente il terzo capoverso della mia Nota per vedere che, nei lavori ivi citati in appoggio della mia tesi, si consigliava di fare uso della rappresentazione grafica delle differenze finite, per uguali intervalli della variabile indipendente, al fine di formulare un giudizio sull'andamento della legge di variazione delle grandezze stesse. Vero è che così operando si può arrivare a deduzioni che risentono l'influenza delle incertezze nella rappresentazione grafica della derivata, laddove la via analitica ci darebbe, secondo il Bemporad, la soluzione ideale di uso quotidiano in astronomia, ma il direttore dell'Osservatorio di Napoli in un'annotazione a pie' della pag. 190 riconosce pure che la rappresentazione grafica serve, per lo meno, ad apportare ai valori della funzione primitiva le correzioni necessarie per rendere gl'intervalli uguali; ed allora non può dirsi a rigore che il metodo

(1) V. «Nuovo Cimento», 1° fasc. del 1926.

astronomico esclude in modo assoluto l'intervento di qualsiasi processo grafico, giacchè se si deve tracciare la curva destinata alle anzidette correzioni si dà adito al dubbio che la personalità del disegnatore possa influire sui risultati, sia pure per un lavoro di prima approssimazione. Del resto si sa che in un campo di prima approssimazione si svolge la massima parte delle ricerche fisiche a causa degl'inevitabili errori dipendenti dai metodi d'indagine o dall'imperfezione dei mezzi di misura, sicchè sarebbe un'illusione il credere che forzando i metodi matematici per risalire dai risultati sperimentali alle leggi dei fenomeni si riesca, in siffatte circostanze reali, ad ottenere con un cumulo di calcoli più di quanto sia consentito da un esame del genere di quello su cui io insisto, quando l'indole dei problemi che si trattano ne suggerisca l'attuazione, e credo che i risultati dei quali feci menzione e di altri lavori in corso siano abbastanza incoraggianti per indurre a ritenere che non vi sia ragione di occuparsi ulteriormente delle critiche astratte e non del tutto serene.

Chimica. — *Sulla presenza, tra i prodotti dell'attuale attività del Vesuvio, di una varietà cesifera del fluoborato di potassio.* Nota del Socio F. ZAMBONINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *La Galleria di Drink (Valle d'Aosta).* Nota del Socio F. SACCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Mancanza di periodo agamo, sviluppo individuale e natura sinciziale in « Cryptochilum echini » Maupas.* Nota del Corrisp. ACHILLE RUSSO ⁽¹⁾.

I Ciliati, come è noto, in un periodo della loro vita si riproducono agamicamente e con tale processo aumentano di numero, fino a che non interviene il processo gametico o sessuale. Varie ipotesi, fondate anche su dati sperimentali, furono fatte sul prodursi del processo sessuale, ma le opinioni al riguardo non sono concordi, perchè, mentre alcuni ritengono esso abbia per effetto il ringiovanimento, dando al Ciliato un nuovo potere di riproduzione agama, altri ritiene invece il processo gametico non sia sempre necessario, avendo il Ciliato un potere indefinito di riproduzione agamica. D'altra parte, secondo alcuni, purchè le condizioni di ambiente siano adatte, il processo sessuale potrebbe compiersi senza essere preceduto da un periodo di riproduzione agamico e ciò per il fatto che gli exconiu-ganti possono coniugare di nuovo, appena usciti dalla coniugazione, compiendo tale processo ripetute volte. In altri termini, potrebbe esistere nei Ciliati una vera indipendenza tra il processo agamico e quello sessuale, ma, comunque, secondo la maggioranza dei biologi, in molti casi, i due processi si alternerebbero con periodi più o meno lunghi, secondo le specie.

Senza volere intervenire nella valutazione di tali dati, per mancanza di ricerche personali, parmi interessante richiamare l'attenzione sul fatto che, in *Cryptochilum*, da me studiato, a differenza di quanto fu osservato nella maggior parte dei Ciliati finora esaminati, manca in ogni caso un periodo agamo, cioè una ripetuta moltiplicazione agama, allo scopo di aumentare, con tale processo, il numero degli individui.

In *Cryptochilum*, la scissione, che compie ogni individuo, ha un particolare significato, che è in dipendenza del momento del ciclo, in cui esso si trova, mai però ha valore di riproduzione agama, all'unico scopo di aumentarne il numero, definitivamente o indefinitamente, costituendo così un particolare periodo del ciclo vitale.

Con altre parole, le divisioni, che compiono gl'individui di *Cryptochilum*, hanno una speciale funzione, che è diretta alla formazione d'individui peculiari, che segnano le varie tappe del ciclo, il quale perciò sarà a sviluppo individuale, in quanto che non esiste alcuna alternanza tra il fenomeno di *agamia* e quello di *sessualità*.

(1) Presentata nella seduta dell'11 aprile 1926.

Difatti, la divisione degl'*Individui misti*, i quali, come ho dimostrato, in Note precedenti, sono le forme adulte sessuate, è destinata a formare soltanto i due primi *Gametogeni*, il *puro* e l'*impuro*⁽¹⁾. Il primo di essi compie un'altra divisione mediante la quale si costituiscono i *Gameti puri*⁽²⁾, che si possono accoppiare per formare la *Coniugazione vera*, che chiude il *ciclo principale*; il secondo invece si divide successivamente due volte, per formare due categorie di *Gameti impuri*⁽³⁾, che producono due *coniugazioni accessorie*, le quali formano ciclo a parte, e che danno per risultato la formazione di *Gametogeni puri* e di nuovi *Gameti puri*, che rinnovano il ciclo principale.

I *Gametogeni puri*, che si costituiscono dagli exconiuganti, dopo le coniugazioni accessorie⁽⁴⁾, compiono, difatti, una prima divisione, con la quale formano due nuovi individui, i quali, alla loro volta, con una seconda divisione, danno i nuovi *Gameti puri*.

Oltre alle divisioni sopra enumerate, non ne esistono altre; per cui si può dire che, in *Cryptochilum*, esse non hanno altra funzione se non quella di formare *Gametogeni* e quindi *Gameti*.

I fatti messi in rilievo e le modalità, con le quali si svolge il ciclo principale di *Cryptochilum*, conforme a quanto ho esposto in una Nota precedente⁽⁵⁾, mi fanno ritenere che tale Ciliato partecipi, sebbene in forma elementare, ai caratteri fondamentali, che distinguono lo sviluppo individuale di forme superiori pluricellulari. In *Cryptochilum*, secondo il mio parere, s'inizia quel processo di differenziamiento, dell'individuo pluricellulare, che raggiunge poi la sua massima manifestazione nei *Metazoi*, nei quali ogni cellula dell'individuo ha, in origine, una particolare destinazione, ed ogni divisione ha, quindi, un determinato ufficio per la formazione di alcune categorie di elementi anatomici.

Cryptochilum però, non è una forma pluricellulare, essendo costituito da un *sincizio*. Tale differenza non ha un valore sostanziale, per l'analogia sopra cennata, perchè i nuclei del nostro Ciliato, liberi nella massa pro-

(1) Russo A., *Gli individui misti formati dagli exconiuganti, dopo la coniugazione vera in «Cryptochilum echini», e l'origine dei Gametogeni*. «Rend. R. Acc. Nazionale dei Lincei», vol. XXXIII, 1° sem., 1924; *Sulla diversa costituzione dei Gameti puri in «Crypt. ech.», risultante dall'analisi delle successioni nucleari, e sulla prevalenza del micronucleo globuliforme* (fig. 2). Ibidem., vol. XXXIII, 2° sem., 1924.

(2) Russo A., Ibidem, fig. 3.

(3) Russo A., *I Gametogeni impuri, i Gameti impuri e le Coniugazioni accessorie in «Crypt. ech.»*, Ibidem, vol. I, 1° sem., 1925 (fig. 1°).

(4) Russo A., *Gli ex coniuganti, derivati dalla 1ª Coniugazione accessoria fra Gameti impuri in «Crypt. ech.»*, danno origine a «Gametogeni puri» ed a «Gameti puri» che rinnovano il ciclo principale. Ibidem, vol. III, 1926.

(5) Russo A., «Individui misti e Gametogeni» (1914, Russo), «Individui neutri» e «preconiuganti» (1925, Dogiel) nel ciclo biologico dei Ciliati in rapporto a quello dei Metazoi. Ibidem, vol. III, 1926.

toplasmatica, hanno funzione tra loro diversa, ma identica a quella dei nuclei cellulari delle forme superiori, come fu dimostrato in Note precedenti⁽¹⁾. Non sarà forse troppo azzardato ammettere si tratti soltanto di grado di differenziamento e che *Cryptochilum* rappresenti una barriera di meno alla recisa distinzione tra *Protozoi* e *Metazoi*.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *I funzionali analitici non lineari.* Nota di LUIGI FANTAPPIÈ, presentata⁽²⁾ dal Socio VOLTERRA.

1. Abbiamo già definito in una Nota precedente⁽³⁾ la derivata funzionale $F'[y(t); \alpha]$ in un punto α di un funzionale analitico $F[y(t)]$ mediante l'espressione

$$(1) \quad F'[y(t); \alpha] = \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} F[y(t) + \varepsilon] \right)_{\varepsilon=0}.$$

Cerchiamo ora di servirci di queste derivate funzionali per il calcolo di alcune espressioni. Supponiamo perciò che nella funzione $y(t)$, a cui si applica il funzionale, entri anche analiticamente un parametro u , sia cioè $y = y(t, u)$; la funzione $f(u) = F[y(t, u)]$ risulterà allora una funzione ancora analitica del parametro u (a causa della supposta analiticità del funzionale), che diremo *composta* mediante il funzionale F e la funzione $y(t, u)$. Se vogliamo calcolare la derivata $f'(u)$ di questa funzione composta in un punto u di regolarità, dovremo calcolare il

$$(2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(u + \varepsilon) - f(u)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[y(t, u + \varepsilon)] - F[y(t, u)]}{\varepsilon}.$$

Osserviamo perciò che è

$$(3) \quad y(t, u + \varepsilon) = y(t, u) + \varepsilon \left(\frac{\partial y(t, u)}{\partial u} + \sigma(t) \right)$$

dove

$$(4) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma(t) = 0.$$

(1) RUSSO A., Confr. le sue Note, segnate al n. 2 a p. 526.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1926.

(3) L. FANTAPPIÈ, *Le derivate dei funzionali analitici*. «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. I, serie 3^a, 1^a sem. 1925.

D'altra parte l'incremento

$$(5) \quad \Delta F = F_t[y(t) + \varepsilon \varphi(t)] - F[y(t)]$$

del funzionale, quando da una funzione iniziale $y(t)$ si passa a una funzione variata $y(t) + \varepsilon \varphi(t)$, è dato da

$$(6) \quad \Delta F = \frac{1}{2\pi i} \int_C F'[y(t); \alpha] \varepsilon \varphi(\alpha) d\alpha + \varepsilon \rho$$

dove è

$$(7) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho = 0$$

e dove C è una curva chiusa della sfera complessa α che racchiude tutti i punti singolari di $\varphi(\alpha)$ ma nessuno dei punti singolari di $F'[y(t); \alpha]$; o, più brevemente (v. Nota citata)

$$(8) \quad \Delta F = \varepsilon F'[y(t); \alpha] \varphi(\alpha) + \varepsilon \rho.$$

Se applichiamo questa formula al caso precedente, in cui la funzione iniziale è la $y(t, u)$ e la funzione variata la

$$y(t, u + \varepsilon) = y(t, u) + \varepsilon \left(\frac{\partial y(t, u)}{\partial u} + \sigma(t) \right),$$

avremo

$$\Delta F = F_t[y(t, u + \varepsilon)] - F_t[y(t, u)] = \varepsilon F'[y(t, u); \alpha] \left(\frac{\partial y(\alpha, u)}{\partial u} + \sigma(\alpha) \right) + \varepsilon \rho$$

da cui, sostituendo nella (2), avremo per (4) e (7)

$$(9) \quad \frac{d}{du} F_t[y(t, u)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\varepsilon} = F'[y(t, u); \alpha] \frac{\partial y(\alpha, u)}{\partial u}.$$

Possiamo dunque dire che la derivata rapporto al parametro u , contenuto nella funzione variabile $y(t, u)$, di un funzionale $F_t[y(t, u)]$ si ottiene eseguendo il prodotto funzionale, rispetto all'indice di derivazione α , della derivata funzionale $F'_t[y(t, u); \alpha]$ per la derivata rapporto ad u , $\frac{\partial y(\alpha, u)}{\partial u}$, della y , in cui però al posto della variabile t si sia sostituito l'indice di derivazione α .

2. Per calcolare le derivate successive della $f(u) = F_t[y(t, u)]$ basterà osservare che la derivata rapporto a un parametro u di un prodotto funzio-

nale $g_1(u, \alpha) g_2(\alpha, u)$ si ottiene, per il teorema sulla derivazione sotto il segno integrale, applicando la stessa regola dei prodotti ordinari. Avremo infatti

$$\frac{d}{du} \frac{1}{2\pi i} \int_C g_1(u, \alpha) g_2(\alpha, u) d\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\partial g_1(u, \alpha)}{\partial u} g_2(\alpha, u) d\alpha + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_C g_1(u, \alpha) \frac{\partial g_2(\alpha, u)}{\partial u} d\alpha$$

cioè

$$(10) \quad \frac{d}{du} g_1(u, \alpha) g_2(\alpha, u) = \frac{\partial g_1(u, \alpha)}{\partial u} g_2(\alpha, u) + g_1(u, \alpha) \frac{\partial g_2(\alpha, u)}{\partial u}.$$

Tenendo conto di questa regola e della (9) potremo allora calcolarci tutte le successive derivate della $f(u) = F_t[y(t, u)]$; così, p. es., avremo per la derivata seconda

$$\frac{d^2}{du^2} F_t[y(t, u)] = \frac{d}{du} F'_t[y(t, u); \alpha] \frac{\partial y(\alpha, u)}{\partial u} = \\ = F''_t[y(t, u); \alpha, \beta] \frac{\partial y(\alpha, u)}{\partial u} \frac{\partial y(\beta, u)}{\partial u} + F'_t[y(t, u); \alpha] \frac{\partial^2 y(\alpha, u)}{\partial u^2}.$$

Se supponiamo poi che il parametro u entri linearmente nella y , sia cioè $y(t, u) = y_0(t) + u\varphi(t)$, queste formule che danno le successive derivate rapporto a u della $f(u) = F_t[y_0(t) + u\varphi(t)]$ si semplificano notevolmente, poichè tutti i termini dopo il primo sono nulli, ed essendo $\frac{\partial y(t, u)}{\partial u} = \varphi(t)$, si avrà

$$\frac{d}{du} F_t[y(t, u)] = F'_t[y(t, u); \alpha] \varphi(\alpha) \\ \frac{d^2}{du^2} F_t[y(t, u)] = F''_t[y(t, u); \alpha_1, \alpha_2] \varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2),$$

e in generale

$$(11) \quad \frac{d^n}{du^n} F_t[y(t, u)] = F_t^{(n)}[y(t, u); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2) \dots \varphi(\alpha_n).$$

3. Se il punto $u = 0$ è un punto di regolarità per la funzione $f(u) = F_t[y(t, u)] = F_t[y_0(t) + u\varphi(t)]$, potremo sviluppare la $f(u)$ in serie di Mac Laurin

$$f(u) = f(0) + \frac{u}{1!} f'(0) + \dots + \frac{u^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

e calcolando le successive derivate per mezzo delle (11), avremo

$$(12) \quad f(u) = F_t[y_0(t) + u\varphi(t)] = F[y_0(t)] + \\ + \sum_n \frac{u^n}{n!} F_t^{(n)}[y_0(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2), \dots, \varphi(\alpha_n)$$

serie che, se $|u|$ è abbastanza piccolo (o, come anche diremo, se $y_0(t) + u\varphi(t)$ è una funzione di t abbastanza vicina alla funzione iniziale $y_0(t)$), convergerà e rappresenterà il valore del funzionale F per la funzione variata $y_0(t) + u\varphi(t)$ quando si conoscano tutte le successive derivate di F per la funzione iniziale $y_0(t)$. Se la serie converge, in particolare, per $u = 1$, se cioè la funzione $y_0(t) + \varphi(t)$ è abbastanza vicina alla $y_0(t)$, avremo infine lo sviluppo in serie di Volterra

$$(13) \quad F[y_0(t) + \varphi(t)] = F[y_0(t)] + \\ + \sum_n \frac{1}{n!} F^{(n)}[y_0(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2) \dots \varphi(\alpha_n)$$

dove ricordiamo che il termine generale è dato da

$$(14) \quad \frac{1}{n!} F^{(n)}[y_0(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2), \dots, \varphi(\alpha_n) = \\ = \frac{1}{n!} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} \int_{C_2} \dots \int_{C_n} F^{(n)}[y_0(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \cdot \\ \cdot \varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2) \cdot \dots \cdot \varphi(\alpha_n) d\alpha_1 d\alpha_2 \cdot \dots \cdot d\alpha_n$$

essendo C_i la solita curva separatrice della sfera complessa α_i che racchiude tutti i punti singolari di $\varphi(\alpha_i)$ ma nessuno di quelli della funzione (simmetrica delle α_i) $F^{(n)}[y(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$.

Lo sviluppo generale (13), che diremo un *elemento del funzionale* F di centro $y_0(t)$, vale per qualsiasi funzionale analitico F , cioè per qualsiasi funzionale che dia luogo a una funzione analitica $f(\alpha, \beta, \dots, \lambda) = F_t[y(t, \alpha, \beta, \dots, \lambda)]$ tutte le volte che la funzione variabile y sia funzione analitica dei parametri $\alpha, \beta, \dots, \lambda$; esso comprende anche come casi particolari gli sviluppi dati dai proff. Volterra⁽¹⁾ e Fréchet⁽²⁾ per alcuni tipi di funzionali analitici.

4. Considerando lo sviluppo (13) potremo poi classificare in due grandi tipi quelle funzioni $\bar{y}(t) = y_0(t) + \bar{\varphi}(t)$ per cui lo sviluppo stesso non vale,

(1) V. VOLTERRA, *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*, «R. Acc. dei Lincei», vol. VI, 1887 (3 note).

(2) M. FRÉCHET, *Sur les fonctionnelles continues*, «Ann. de l'Ecole Normale», 3^e serie, to. 27, 1910.

e che diremo perciò *funzioni singolari per l'elemento di centro $y_0(t)$ del funzionale F* , e cioè

a) *funzioni singolari di 1^a specie*, quando qualcuno dei termini della serie (13) perde significato, quando cioè non è possibile eseguire i prodotti di composizione funzionale indicati dalla formula (14). Ciò accade allorchè si può trovare un sistema di n punti singolari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ della $\bar{\varphi}(\alpha)$ (anche coincidenti) per cui la funzione di n variabili $F^{(n)}[y_0(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ diventa singolare;

b) *funzioni singolari di 2^a specie* per l'elemento, quando invece tutti i termini della serie (13) hanno un significato perfettamente determinato, ma la serie stessa non converge.

È da osservare che se la funzione $y_0(t) + \bar{\varphi}(t)$ è singolare di 1^a specie per l'elemento di centro $y_0(t)$, anche tutte le funzioni $y_0(t) + u\bar{\varphi}(t)$, con u qualunque purchè $u \neq 0$, sono pure singolari di 1^a specie per lo stesso elemento; mentre invece, se $y_0(t) + \bar{\varphi}(t)$ è singolare di 2^a specie, potrà accadere che le funzioni $y_0(t) + u\bar{\varphi}(t)$, con $|u|$ abbastanza piccolo; siano regolari, cioè converga, per questi valori di u la serie (12).

5. Se le derivate $F^{(n)}[y_0(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ sono tutte identicamente nulle per $n > m$, il funzionale $F[y(t)]$ si dirà un *funzionale polinomiale* o di *grado finito* (di grado m se la derivata m ^{esima} non è identicamente nulla).

Questi funzionali di grado finito m godono di proprietà simili a quelle riscontrate nei funzionali lineari, a cui si riducono per $m = 1$ e $F[0] = 0$. Così per essi la serie (13) è sempre convergente poichè si riduce a una somma di un numero finito di termini, e basta quindi un solo elemento (di centro $y_0(t)$) a rappresentare il funzionale in tutto il suo campo d'esistenza.

Se poi la funzione $y(t) = y_0(t) + \bar{\varphi}(t)$ a cui è applicato il funzionale F di grado m , dipende linearmente da certi parametri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, segue dall'espressione generale

$$(15) \quad F[y(t)] = F[y_0(t)] + \sum_{n=1}^m \frac{1}{n!} F^{(n)}[y_0(t); \alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*] \varphi(\alpha_1^*) \varphi(\alpha_2^*) \dots \varphi(\alpha_n^*)$$

che il funzionale stesso risulterà un polinomio di grado m (o minore) nelle λ (anzi questa proprietà potrebbe bastare a definire questi funzionali polinomiali).

Inoltre i funzionali di grado finito m non potranno avere funzioni singolari di 2^a specie, e tutte le loro funzioni singolari (di 1^a specie) saranno date da quelle funzioni $\bar{y}(t) = y_0(t) + \bar{\varphi}(t)$ per cui qualche termine dello sviluppo (15) perde significato.

6. Se infine consideriamo un funzionale di grado finito m che a ogni funzione $y(t)$ di un certo campo fa corrispondere un'altra funzione $f(\chi) =$

= $F[y(t); \zeta]$, potremo immediatamente, per le considerazioni precedenti, determinare i possibili punti singolari della $f(\zeta)$ una volta noti quelli di $y(t)$. Se infatti lo sviluppo del funzionale è dato dall'elemento di centro $y_0(t)$

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= F[y_0(t) + \varphi(t); \zeta] \\ &= F[y_0(t); \zeta] + \sum_n \frac{1}{n!} F^{(n)}[y_0(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \zeta] \varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2) \dots \varphi(\alpha_n) \\ &= v_0(\zeta) + v_1(\zeta; \alpha_1) \varphi(\alpha_1) + \frac{1}{2!} v_2(\zeta; \alpha_1, \alpha_2) \varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2) + \\ &\quad + \dots + \frac{1}{m!} v_m(\zeta; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2) \dots \varphi(\alpha_m) \end{aligned}$$

il funzionale stesso non sarà definito affatto per quelle funzioni $\bar{y}(t)$ per cui $\bar{\varphi}(t) = \bar{y}(t) - y_0(t)$ ha punti singolari tali che sostituiti in tutti i modi possibili nelle $v_n(\zeta; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ al posto delle α , rendono singolare qualcuna di queste v_n , qualunque sia ζ ; mentre per le altre $y(t)$ per cui F è definito (per ζ generico) i punti singolari $\bar{\zeta}$ della $f(\zeta) = F[y(t); \zeta]$ dovranno trovarsi fra quelli delle funzioni di ζ

$$\begin{aligned} &v_0(\zeta) \\ &v_1(\zeta; \bar{t}_1), \quad v_1(\zeta; \bar{t}_2), \dots \\ &v_2(\zeta; \bar{t}_1, \bar{t}_2), \quad v_2(\zeta; \bar{t}_1, \bar{t}_1), \dots \\ &\dots\dots\dots \\ &v_m(\zeta; \bar{t}_{r_1}, \bar{t}_{r_2}, \dots, \bar{t}_{r_m}), \dots \end{aligned}$$

che si ottengono sostituendo in tutti i modi possibili nelle derivate successive v_n del funzionale i punti singolari \bar{t}_r della funzione $\varphi(t) = y(t) - y_0(t)$ agli indici di derivazione α .

Vediamo così che le proprietà dell'indicatrice $v(\zeta, \alpha)$ dei punti singolari di un funzionale lineare⁽¹⁾ si estendono immediatamente ai funzionali di grado finito m , considerando non più una sola indicatrice, come nel caso dei funzionali lineari omogenei (la derivata prima), ma la funzione v_0 e tutte le m derivate v_1, v_2, \dots, v_m (non nulle) del funzionale, che possono dunque considerarsi come indicatrici generalizzate.

La determinazione dei possibili punti singolari della $f(\zeta) = F[y(t); \zeta]$ si può eseguire con questo metodo delle indicatrici anche quando il funzionale non è di grado finito m , ma ha solo funzioni singolari di 1^a specie, nel quale caso si dirà un funzionale trascendente intero; bisognerà però considerare allora infinite indicatrici, e cioè tutte le derivate $v_n(\zeta; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ e sostituire in esse in tutti i modi possibili i valori singolari \bar{t} della $\varphi(t) = y(t) - y_0(t)$ al posto delle α .

(1) Cfr. L. FANTAPPIÈ, *Le funzionali lineari analitiche e le loro singolarità*, « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. I, serie 6^a, 1^o sem., 1926.

Matematica. — *Formula d'inversione dell'ordine di due integrazioni doppie « con asterisco ».* Nota di FRANCESCO TRICOMI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. F. SEVERI.

Il Poincaré, il Villat, G. Bertrand ed io abbiamo avuto di recente occasione d'indicare diverse interessanti applicazioni delle equazioni integrali « con asterisco » all'Analisi ed alla Fisica Matematica. Equazione integrale « con asterisco » intendo un'equazione del tipo di Fredholm ma in cui, dell'integrale, si considera il *valor principale* nel senso di Cauchy.

Oltre quelle considerate dagli AA. surricordati, anche altre importanti questioni di Fisica Matematica possono parimenti ricondursi ad equazioni integrali « con asterisco »; senonchè talune — e non delle meno interessanti — danno luogo non già ad equazioni contenenti il valor principale di un integrale semplice, bensì quello di un integrale doppio, cioè a dire ad equazioni integrali del tipo

$$(1) \quad \varphi(P) - \lambda \iint_S^* K(P, Q) \varphi(Q) dS_Q = f(P),$$

in cui il nucleo K è una funzione dei due punti P e Q (entrambi interni all'area S) che diviene infinita di second'ordine per $P \rightarrow Q$. Quanto all'integrale con asterisco, esso ha ovviamente il significato di valor limite per $\epsilon \rightarrow 0$ dell'integrale ordinario esteso all'area S da cui sia stato tolto il punto P mediante un *cerchietto* di centro P e raggio ϵ .

Sulle equazioni del tipo (2) poco o nulla oggi può dirsi, e il loro studio sembra oltremodo difficile. Comunque io ho potuto fare il primo, modesto ma necessario passo in questa via, determinando la formula d'inversione dell'ordine di due successive integrazioni doppie con asterisco, la cui conoscenza è indispensabile per poter *iterare* i nuclei singolari K .

Com'è noto, la formula analoga relativa al caso degli integrali semplici:

$$(2) \quad \int_{a_2}^{*b_2} \frac{d\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma} - x} \int_{a_1}^{*b_1} \frac{f(x, y, \tilde{\gamma})}{y - \tilde{\gamma}} d\tilde{\gamma} = \int_{a_1}^{*b_1} dy \int_{a_2}^{*b_2} \frac{f(x, y, \tilde{\gamma})}{(\tilde{\gamma} - x)(y - \tilde{\gamma})} d\tilde{\gamma} - \pi^2 f(x, x, x)$$

è stata data dal Poincaré ⁽²⁾, salvo un errore nel segno del residuo $\pi^2 f(x, x, x)$ poi corretto da G. Bertrand ⁽³⁾, ed è una formula alquanto riposta e di laboriosa

(1) Nella seduta dell' 11 aprile 1926.

(2) *Leçons de Mécanique céleste*, t. III; chap. X, § 154, p. 253 e seg. (Paris, Gauthier-Villars, 1910).

(3) *La théorie des marées et les équations intégrales* [« Ann. École Norm. Sup. », (3), 40 (1923)] e *Le problème de Dirichlet et le potentiel de simple couche* [« Bull. des Sciences math. » (2), 47 (1923)].

dimostrazione⁽¹⁾. A prima vista potrebbe credersi che la formula d'inversione degli integrali doppi potesse ricavarsi dalla (2), ma un esame un po' più da vicino della questione mostra subito che ciò non è facile. Del resto, non è questo il solo caso in cui il passaggio da una a due dimensioni cambia essenzialmente la natura della questione. Pertanto ho dovuto ricavare la formula in discorso per tutt'altra via, col procedimento che mi propongo di esporre qui sommariamente, rimandando tutti gli sviluppi di calcolo ad altra pubblicazione.

Posto genericamente

$$M_i(A, B) = \frac{F_i[\text{ang}(x, BA)]}{AB^2} \quad (i = 1, 2),$$

dove $F_i(\theta)$ denota una funzione qualsiasi (continua) di θ , periodica col periodo 2π e soddisfacente alla condizione

$$(3) \quad \int_0^{2\pi} F_i(\theta) d\theta = 0$$

(necessaria e sufficiente per l'esistenza degli integrali con asterisco che dovremo considerare), il problema dell'inversione consiste nel trovare la relazione che lega fra loro i due integrali principali

$$I_1 = \iint_{S_2}^* M_1(P, R) dS_R \iint_{S_1}^* M_2(R, Q) f(P, Q, R) dS_Q$$

e

$$I_2 = \iint_{S_1}^* dS_Q \iint_{S_2}^* M_1(P, R) M_2(R, Q) f(P, Q, R) dS_R$$

dove f denota una funzione continua (lipschitziana) dei tre punti P, Q, R ed S_1 ed S_2 due campi d'integrazione comprendenti entrambi il punto P nel loro interno. In altre parole, tutto sta a determinare la differenza $I_1 - I_2$ date che siano le funzioni F_1, F_2 ed f .

Allo scopo suindicato, cominciamo con l'osservare che può agevolmente dimostrarsi che gli integrali analoghi a I_1 ed I_2 ma contenenti in luogo di $f(P, Q, R)$ la differenza $f(P, Q, R) - f(P, P, P)$, sono sempre uguali fra loro; avremo dunque

$$(4) \quad I_1 - I_2 = f(P, P, P) (I_1^{(0)} - I_2^{(0)}),$$

(1) Per una dimostrazione un po' più semplice di quelle del Bertrand, v. la mia Memoria: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali*, ecc. (cap. VII, § 2) [«Mem. Linc.»

(5) 14 (1923)].

avendo indicato con $I_1^{(0)}$ ed $I_2^{(0)}$ ciò che diventano gli integrali I_1 ed I_2 allorchè si pone $f(P, Q, R) = 1$. Un secondo passo consiste nell'osservare che la differenza $I_1^{(0)} - I_2^{(0)}$ non dipende dalla forma e dimensioni dei due campi S_1 ed S_2 purchè, beninteso, essi comprendano sempre nel loro interno il punto P ; potremo dunque supporre $S_1 \equiv S_2 \equiv C$, avendo indicato con C un cerchio col centro in P , di un certo raggio a .

Ciò premesso osserviamo che, detta x l'ascissa del punto Q e denotata con $\Phi_2(\theta)$ una funzione tale da aversi ⁽¹⁾

$$(5) \quad \frac{d}{d\theta} [\Phi_2(\theta) \sin \theta] = F_2(\theta),$$

si ha

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\Phi_2[\text{ang}(x, QR)]}{RQ} = M_2(Q, R),$$

di guisa che — detta Γ la circonferenza di C e γ_ϵ una piccola circonferenza di centro R e raggio ϵ — pel lemma di Gauss potrà porsi (con ovvie notazioni)

$$\begin{aligned} \iint_C^* M_2(Q, R) dS_Q &= - \int_\Gamma \frac{\Phi_2(x, QR)}{RQ} \cos(x, n_Q) ds_Q + \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{\Phi_2(x, QR)}{RQ} \cos(x, n_Q) ds_Q \end{aligned}$$

da cui, tenendo conto della (3), si trae

$$(6) \quad I_1^{(0)} = - \iint_C^* M_1(P, R) dS_R \int_\Gamma \frac{\Phi_2(x, QR)}{RQ} \cos(x, n_Q) ds_Q.$$

Per mettere anche l'integrale $I_2^{(0)}$ sotto una forma analoga, cominciamo con l'osservare che regge la seguente *formula di derivazione*:

$$\begin{aligned} (7) \quad \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \frac{\Phi_2(x, QR)}{RQ} f(R) dS_R &= \iint_S^* M_2(R, Q) f(R) dS_R - \\ &- f(Q) \int_0^{2\pi} \Phi_2(\theta) \cos \theta d\theta; \end{aligned}$$

(1) Nella trattazione *in extenso* sarà dimostrato come, supponendo opportunamente scelto l'asse x (che è in nostro arbitrio), la sola condizione (3) sia sufficiente ad assicurare l'esistenza di una funzione Φ_2 sempre finita nell'intervallo $(0, 2\pi)$.

ne segue che potrà porsi

$$\iint_C^* M_1(P, R) M_2(R, Q) dS_R = \frac{\partial}{\partial x} \iint_C^* M_1(P, R) \frac{\Phi_2(x, QR)}{RQ} dS_R + \\ + M_1(P, Q) \int_0^{2\pi} \Phi_2(\theta) \cos \theta d\theta,$$

da cui, tenendo conto della (3), si trae

$$I_2^{(0)} = \iint_C dS_Q \frac{\partial}{\partial x} \iint_C^* M_1(P, R) \frac{\Phi_2(x, QR)}{RQ} dS_R$$

e finalmente, applicando il lemma di Gauss,

$$(8) \quad I_2^{(0)} = - \int_{\Gamma} \cos(x, n_Q) dS_Q \iint_C^* M_1(P, R) \frac{\Phi_2(x, QR)}{RQ} dS_R + \\ + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma'_\epsilon} \cos(x, n_Q) dS_Q \iint_C^* M_1(P, R) \frac{\Phi_2(x, QR)}{RQ} dS_R,$$

dove Γ'_ϵ denota una circonferenza di centro P e raggio ϵ .

Dalle (6) e (8), essendo lecito invertire senz'altro l'ordine di un'integrazione ordinaria e di una con asterisco, si trae che

$$I_2^{(0)} - I_1^{(0)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma'_\epsilon} \cos(x, n_Q) dS_Q \iint_C^* M_1(P, R) \frac{\Phi_2(x, QR)}{RQ} dS_R,$$

ma il secondo membro dev'essere manifestamente indipendente dal raggio a di C, dunque - considerato che esiste ed è finito il suo limite per $a \rightarrow \infty$ - potremo porre ancora

$$I_2^{(0)} - I_1^{(0)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma'_\epsilon} \cos(x, n_Q) dS_Q \iint_{\infty}^* M_1(P, R) \frac{\Phi_2(x, QR)}{RQ} dS_R,$$

dove col simbolo ∞ a piè dell'integrale doppio si è inteso denotare che questo va esteso all'intero piano R.

Giunte le cose a questo punto, la valutazione della differenza $I_2^{(0)} - I_1^{(0)}$ è un semplice problema di Calcolo, che va trattato con un po' di garbo ma per cui ci sono vie già tracciate. Precisamente conviene eseguire l'integrazione lungo la circonferenza Γ'_ϵ assumendo come variabile d'integrazione

l'angolo $(x, QR) = \varphi$. All'uopo è necessario effettuare una trasformazione analoga a quella di Landen nella teoria delle funzioni ellittiche, con la quale - distinguendo i due casi di R interno od esterno alla circonferenza γ'_ε - si giunge alla formula

$$(9) \quad I_2^{(0)} - I_1^{(0)} = - \int_0^\varepsilon d\rho \int_0^{2\pi} F_1(\theta + \pi) d\theta \int_0^{2\pi} \Phi_2(\varphi) \frac{\sin \varphi \sin(\varphi - \theta)}{\sqrt{\varepsilon^2 - \rho^2 \sin^2(\varphi - \theta)}} d\varphi - \\ - 2 \int_\varepsilon^\infty d\rho \int_0^{2\pi} F_1(\theta + \pi) d\theta \int_{\theta - \alpha}^{\theta + \alpha} \Phi_2(\varphi) \frac{\sin \varphi \sin(\varphi - \theta)}{\sqrt{\varepsilon^2 - \rho^2 \sin^2(\varphi - \theta)}} d\varphi, \quad \left(\sin \alpha = \frac{\varepsilon}{\rho} \right),$$

senza bisogno di eseguire effettivamente il passaggio al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ perchè il secondo membro della (9) è solo apparentemente funzione di ε (per vederlo, basta fare la sostituzione $\rho = t\varepsilon$).

La (9) può essere grandemente semplificata eseguendo l'integrazione rispetto a ρ ; in tal modo - con calcoli del tutto elementari - si perviene in definitiva alla formula semplicissima

$$I_2^{(0)} - I_1^{(0)} = - 2\pi \int_0^{2\pi} \bar{F}_1(\theta) \bar{F}_2(\theta + \pi) d\theta,$$

dove le funzioni \bar{F}_1 e \bar{F}_2 sono definite dalle formule

$$(10) \quad \bar{F}_1(\theta) = \int_0^\theta F_1(x) dx + c_1, \quad \bar{F}_2(\theta) = \int_0^\theta F_2(x) dx + c_2,$$

essendo le costanti c_1 e c_2 determinate in modo che sia soddisfatta una almeno delle due condizioni

$$(11) \quad \int_0^{2\pi} \bar{F}_1(\theta) d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \bar{F}_2(\theta) d\theta = 0.$$

Se ne conclude, ricordando la (4), che la formula d'inversione dell'ordine di due successive integrazioni doppie con asterisco, è la seguente:

$$(12) \quad \iint_{S_2}^* M_1(P, R) dS_R \iint_{S_1}^* M_2(R, Q) f(P, Q, R) dS_Q = \\ = \iint_{S_1}^* dS_Q \iint_{S_2}^* M_1(P, R) M_2(R, Q) f(P, Q, R) dS_R + \\ + 2\pi \int_0^{2\pi} F_1(\theta) F_2(\theta + \pi) d\theta \cdot f(P, P, P).$$

Matematica. — *Sulla unicità delle funzioni interpolari soddisfacenti a certe condizioni asintotiche.* Nota di VLADIMIRO BERNSTEIN, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Diremo che una funzione $f(z)$, regolare in una regione D che si estende all'infinito, cresce in questa regione meno rapidamente di una data funzione positiva $\varphi(r)$ della variabile reale $r = |z|$, se all'interno e sulla frontiera di D si ha

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(re^{i\psi})}{\varphi(r)} = 0$$

uniformemente rispetto a ψ . Denoteremo inoltre con $R(z)$ la parte reale di z .

Ciò posto, ricordiamo che il sig. Valiron ha dimostrato in una Memoria recente («Bull. des Sc. Math.», t. XLIX, pp. 204-206) che tutte le funzioni intere, crescenti meno rapidamente di $e^{\pi r}$, sono completamente determinate dai loro valori nei punti $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots$.

Dimosteremo in questa Nota che tutte le funzioni regolari in un semipiano $R(z) \geq a$ e crescenti in questo semipiano meno rapidamente di $e^{\beta r}$, con β inferiore a π , sono completamente determinate dal comportamento asintotico dei valori che esse prendono nei punti interi e positivi.

Più precisamente dimosteremo questo teorema:

Sia $\varphi(z)$ una funzione soddisfacente alle condizioni seguenti:

α) $\varphi(z)$ è regolare in un semipiano $R(z) \geq a$ e cresce in questo semipiano meno rapidamente di $e^{\beta r}$, con β inferiore a π ;

β) per tutti i valori interi di z superiori ad un numero dato N si ha

$$(1) \quad |\varphi(z)| < e^{-\beta z \log z} \quad \text{con} \quad \beta > 2.$$

In queste condizioni $\varphi(z)$ è identicamente nulla.

2. Cominceremo col dimostrare che, se $\varphi(z)$ soddisfa alle condizioni α) e β), essa si annulla per tutti i valori interi di z situati nel semipiano considerato. Supponiamo che a non sia un numero intero e consideriamo la serie di Taylor

$$(2) \quad \Psi(\xi) = \sum_{v=[a]+1}^{\infty} \varphi(v) \xi^{v-[a]-1}$$

(1) Nella seduta dell'11 aprile 1926.

designando con $[a]$ il più grande numero intero inferiore ad a . Si vede subito che questa serie rappresenta una funzione intera d'ordine inferiore a $\frac{1}{2}$. Applichiamo a questa funzione il teorema seguente del sig. Le Roy:

Sia $\varphi(z)$ una funzione analitica della variabile $z \equiv \tau + it$, che soddisfa alle condizioni seguenti:

1° $\varphi(z)$ è regolare in un semipiano $\tau \geq \alpha$, ove α è un numero compreso tra -1 e 0 ;

2° Esiste un numero ϑ inferiore a π e tale che, per quanto piccolo sia il numero positivo ε , si abbia

$$|\varphi(\alpha + \rho e^{i\psi})| < e^{(\vartheta + \varepsilon)\rho} \quad \text{per} \quad |\psi| \leq \frac{\pi}{2}$$

non appena ρ sorpassi un certo limite fisso.

In queste condizioni la funzione $F(x)$ della variabile $x \equiv re^{i\theta}$, definita dalla serie

$$F(x) = \sum_0^{\infty} \varphi(v) x^v,$$

è regolare in tutti i punti x interni all'angolo

$$(3) \quad \vartheta + \sigma < \theta < 2\pi - \vartheta - \sigma,$$

comunque si scelga il numero positivo σ , e può essere rappresentata all'interno di quest'angolo dall'espressione

$$(4) \quad F(x) = + 2(-x)^{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\alpha + it)(-x)^{it}}{\sin[\pi(\alpha + it)]} dt.$$

In questa espressione l'integrale, considerato come funzione di x , tende uniformemente verso zero quando x tende verso l'infinito rimanendo nell'angolo (3). (V. Lindelöf, *Calcul des residus*, pp. 108-116).

Questo teorema ci mostra che la funzione (2) può essere rappresentata sull'asse reale negativo dall'espressione

$$\Psi(\xi) = \xi^{\alpha} \varepsilon(\xi)$$

ove $-1 < \alpha = a - [a] - 1 < 0$ ed $\varepsilon(\xi)$ è una funzione limitata. Ne segue che $\Psi(\xi)$ tende verso zero quando ξ s'allontana indefinitamente seguendo l'asse reale negativo. Orbene, secondo un teorema di Wiman (v. Wiman, « *Arkiv für Math.* », t. 2) una funzione d'ordine inferiore a $\frac{1}{2}$ non può essere limitata sopra una semiretta a meno che essa si riduca a una costante. La

funzione $\Psi(\xi)$ deve dunque essere identicamente nulla; per conseguenza la funzione $\varphi(\chi)$ deve annullarsi per tutti i valori interi di χ superiori ad a ⁽¹⁾.

3. Un interessante caso particolare del teorema che abbiamo testè dimostrato, è quello in cui $\varphi(\chi)$ si annulla per i valori interi di χ superiori ad un numero dato N . Si ha allora il teorema seguente:

Se una funzione $\varphi(\chi)$, soddisfacente alla condizione α) del n. 1, si annulla per tutti i valori interi della variabile superiori ad un numero fisso N , essa si annulla anche per tutti i valori interi della variabile situati nel semipiano considerato.

Consideriamo adesso una funzione intera $f(\chi)$ crescente meno rapidamente di $e^{\vartheta r}$, con ϑ inferiore a π , e supponiamo che essa si annulli per tutti i valori interi e positivi della variabile. Basta applicare a questa funzione il teorema precedente in un semipiano $R(\chi) \equiv b$, essendo b un numero negativo qualunque, per vedere che $f(\chi)$ si annulla per i valori interi negativi di χ , il cui valore assoluto è inferiore a $|b|$. Siccome b è un numero qualunque, $f(\chi)$ si annulla necessariamente per tutti i valori interi di χ . Il teorema di Valiron (loc. cit.) ci dice che in questo caso la funzione è identicamente nulla. Possiamo dunque affermare che tutte le funzioni intere, crescenti meno rapidamente di $e^{\vartheta r}$, ove ϑ è inferiore a π , sono completamente determinate dai loro valori nei punti $1, 2, \dots, n, \dots$.

Questo teorema è evidentemente un caso particolare del teorema del n. 1. Abbiamo però pensato che non sia senza interesse di darne una dimostrazione diretta, indipendente da quella del teorema generale.

4. Notiamo adesso che se una funzione reale $u(t)$ della variabile t , regolare per tutti i valori reali della variabile, è tale che, per $|t| > T$, si abbia

$$|u(t)| < e^{-\pi|t|},$$

essendo η un numero positivo, e se inoltre

$$I(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cos(st) dt = 0$$

(1) Valendosi invece del teorema di Wiman di quello di Phragmén, secondo cui una funzione intera d'ordine ρ non può rimanere limitata in nessun angolo d'apertura superiore a $\frac{\pi}{\rho}$ (v. PHRAGMEN e LINDELÖF, *Sur une extension d'un principe classique d'analyse*, etc. « Acta Math. », t. XXXI), si potrebbe sostituire in (1) la condizione $\beta > 2$ con quella più larga $\beta > \frac{2\vartheta}{\pi}$.

per tutti i valori reali di s , questa funzione è necessariamente una funzione dispari, cioè $u(t) = -u(-t)$. Infatti poniamo

$$U(t) = \frac{u(t) + u(-t)}{2}, \quad V(t) = \frac{u(t) - u(-t)}{2}.$$

Allora

$$(5) \quad I(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) \cos(st) dt = 2 \int_0^{\infty} U(t) \cos(st) dt = 0.$$

È noto però che per tutte le funzioni del tipo considerato

$$(6) \quad u(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(st) dt \int_0^{\infty} \cos(t\chi) u(\chi) d\chi$$

(v. p. es. Kronecker, *Vorlesungen über die Theorie der Integrale*, s. 80-85). Comparando (5) con (6) si vede che $U(t) \equiv 0$; dunque $u(t) = -u(-t)$, come volevamo dimostrare. Nello stesso modo si può vedere che, se una funzione $v(t)$ dello stesso tipo verifica la condizione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \sin(st) dt = 0$$

per tutti i valori reali di s , essa è necessariamente una funzione pari.

5. Torniamo adesso alle funzioni $\varphi(\chi)$ e $\Psi(\xi)$ del n. 2. Abbiamo visto che la $\Psi(\xi)$ è identicamente nulla. La formula (4) ci mostra dunque che per tutti i valori reali e positivi di ξ si ha

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\beta + it) \xi^{it}}{\sin[\pi(\beta + it)]} dt = 0 \quad (\alpha \equiv \beta < 0).$$

Poniamo

$$\frac{\varphi(\beta + it)}{\sin[\pi(\beta + it)]} = u(t) + iv(t) \quad ; \quad \xi = e^s.$$

La formula (7) si trasforma allora nel sistema seguente

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cos(st) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \sin(st) dt = 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \sin(st) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cos(st) dt = 0. \end{cases}$$

Qui, gli integrali dipendenti da $\cos(st)$ sono funzioni pari, e gli integrali dipendenti da $\sin(st)$ sono funzioni dispari di s . Siccome la somma di una funzione pari con una funzione dispari non può essere identicamente nulla, se non nel caso che lo siano le funzioni stesse, vediamo che si ha

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cos(st) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cos(st) dt = 0$$

$$(9) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \sin(st) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \sin(st) dt = 0.$$

Le (8) ci mostrano che le funzioni $u(t)$ e $v(t)$ sono dispari; le (9) mostrano invece che esse sono delle funzioni pari. Ne segue che $u(t)$ e $v(t)$ sono identicamente nulle. È dunque identicamente nulla anche la funzione $\varphi(\zeta)$. Abbiamo così dimostrato il teorema del n. 1.

6. Si potrebbe credere che la condizione $\vartheta < \pi$ fosse dovuta soltanto al metodo di dimostrazione usato. Però la funzione

$$\varphi(\zeta) = \frac{\sin \pi \zeta}{\zeta + 1}$$

mostra che questa condizione è essenziale ed è dovuta alla natura stessa delle cose.

Matematica. — *Sur les espaces de Riemann dans lesquels le transport par parallélisme conserve la courbure.* Nota di E. CARTAN, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Dans une note récente ⁽²⁾, M. Harry Levy s'est proposé de rechercher l'expression générale des ds^2 pour lesquels les symboles de Riemann à cinq indices sont tous nuls. Je viens précisément de m'occuper du même problème et je désirerais signaler rapidement une partie des résultats auxquels je suis arrivé.

Le problème s'est posé à moi sous la forme suivante: *Trouver tous les espaces de Riemann jouissant de la propriété que la courbure riemannienne d'une facette quelconque se conserve lorsqu'on lui fait subir un transport par parallélisme quelconque.* Je suppose le ds^2 défini et je me borne aux solutions irréductibles du problème, c'est-à-dire à celles pour lesquelles le ds^2 ne peut pas être regardé comme la somme de deux autres éléments linéaires à variables indépendants qui soient eux-mêmes des solutions du problème.

(1) Nella seduta del 18 aprile 1926.

(2) « Rendiconti », (6) 3^a, 1926, pp. 65-69.

1. On sait qu'à tout point A d'un espace de Riemann on peut attacher un groupe de rotations Γ (groupe de holonomie)⁽¹⁾ qui indique les rotations subies par le corps des vecteurs issus de A quand on le transporte par parallélisme le long d'un cycle arbitraire; ce groupe est le même en tous les points de l'espace. Il est évident que le groupe Γ laisse invariante la forme de Riemann

$$(1) \quad R = R_{ijkh} x^i y^j x^h y^k$$

dont dépend la courbure riemanienne de la facette définie par les deux vecteurs x^i et y^j .

Le problème proposé peut alors se ramener à la recherche de tous les groupes de rotations Γ qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane réelle et qui laissent invariante une forme telle que (1). Ce groupe est simple ou décomposable en deux sous-groupes simples; il contient en outre une transformation infinitésimale distinguée dans le cas où il laisse invariante une multiplicité plane imaginaire (qui est alors totalement isotrope). En se servant des relations

$$R_{ijkh} + R_{ikjh} + R_{ihjk} = 0$$

on peut déterminer complètement tous les groupes Γ possibles, ainsi que la forme R correspondant à chacun d'eux. Cette forme n'est définie qu'à un facteur constant près; suivant le signe de ce facteur, l'espace est à courbure riemanienne partout positive ou partout négative.

Les espaces obtenus admettent un groupe de déplacements G transitif d'ordre $r + n$, en désignant par r l'ordre du groupe Γ . Ce groupe G est simple⁽²⁾. Le groupe Γ est à la fois le groupe d'holonomie et le groupe d'isotropie de l'espace: j'entends par là le groupe des rotations qu'on peut effectuer autour d'un point A sans changer les propriétés géométriques de l'espace autour de ce point. Pour tous ces espaces, le tenseur R_{ij} ne diffère que par un facteur constant du tenseur fondamental.

Les espaces irréductibles obtenus se partagent en 10 grandes classes dépendant chacune d'un ou de deux entiers arbitraires; il existe en outre 12 classes particulières correspondant à des groupes simples G de types exceptionnels. Parmi les classes générales je signalerai seulement, en dehors de celle des espaces de groupes simples, dont il est question dans la note 1,

(1) E. CARTAN, « Ann. Ec. Norm. », (3) 42, 1925, p. 21; voir aussi E. CARTAN, *La Géométrie des espaces de Riemann*, « Mémoires des Sc. Math. », Gauthier-Villars, 1925, p. 54 et 55; et un mémoire des « Acta Math. », t. 48, 1925.

(2) Il y a exception pour une classe particulière, celle des espaces de groupes simples, sur lesquels paraîtra prochainement dans les *Proceedings* de l'Académie d'Amsterdam une note publiée en collaboration avec M. J. A. Schouten, et où est signalée la propriété: $R_{iikh} = 0$.

la classe des espaces à courbure constante, indiquée par M. Harry Levy, et celle des groupes hermitiens elliptiques et hyperboliques.

Tous ces nouveaux espaces mériteraient certainement une étude approfondie; on peut, par des opérations purement algébriques, déterminer toutes leurs variétés totalement géodésiques.

2. Ce qu'il y a peut-être de plus curieux et surtout de plus inattendu, c'est l'équivalence entre le problème proposé et un autre problème de la théorie des groupes, que j'ai résolu il y a quelques années par des calculs assez pénibles⁽¹⁾, à savoir la détermination de toutes les formes de structures simples réelles correspondant à une même structure simple complexe.

Si nous considérons un des groupes Γ possibles, il lui correspond des espaces à courbure positive et des espaces à courbure négative. Le groupe de déplacements G de l'un des premiers est isomorphe, par une correspondance *imaginaire*, au groupe de déplacements G' de l'un des derniers. La forme quadratique $-\psi_2(e)$, qui indique la somme changée de signe des carrés des racines de l'équation caractéristique d'un groupe⁽²⁾ est définie positive (somme de $r + n$ carrés positifs) pour G tandis que pour G' elle est la somme de r carrés positifs et de n carrés négatifs. Tout groupe Γ ou toute classe d'espaces correspondants fournit donc deux formes *distinctes* de structures simples réelles correspondant à la même structure complexe.

La réciproque est vraie; j'indique sur un exemple comment les choses se passent. Considérons le groupe linéaire G d'une forme d'Hermite définie positive à v variables ($-\psi_2(e)$ est une forme définie somme de $v^2 - 1$ carrés positifs) et le groupe G' des transformations homographiques réelles à $v - 1$ variables ($-\psi_2(e)$ est la somme de $\frac{v(v-1)}{2}$ carrés positifs et $\frac{v^2 + v - 2}{2}$ carrés négatifs). Ces deux groupes sont rendus isomorphes par une correspondance *imaginaire*.

Considérons les paramètres du groupe G comme les coordonnées d'un point d'un espace E , et ceux de G' comme les coordonnées d'un point d'un espace E' , tous deux à $v^2 - 1$ dimensions.

Ces deux espaces peuvent être regardés comme des espaces de Riemann, le premier à ds^2 défini positif, le second à ds^2 indéfini, somme de $\frac{v(v-1)}{2}$ carrés positifs et de $\frac{v^2 + v - 2}{2}$ carrés négatifs. L'espace réel E' est applicable sur un domaine à $v^2 - 1$ dimensions (réelles) de l'espace E complexe; dans cette application les points de E' qui s'appliquent sur des points réels

(1) E. CARTAN, *Les groupes réels simples, finis et continus*; « Ann. Ec. Norm. », (3), 31, 1914, pp. 263-355.

(2) V. le Mémoire cité ci-dessus et aussi E. CARTAN, *Thèse*, Paris, Nony, 1894.

de E forment, dans E' , une variété totalement géodésique V' à $\frac{v(v-1)}{2}$ dimensions à laquelle il correspond dans E une variété analogue V .

Si par un point A de V on mène dans E l'élément plan à $\frac{v^2 + v - 2}{2}$ dimensions orthogonal à V , la variété (réelle) W , géodésique en A , tangente à cet élément plan, est totalement géodésique. On a de même dans E' une variété totalement géodésique (réelle) W' . Les deux variétés W et W' sont des espaces de Riemann à ds^2 défini, la première à courbure positive, la seconde à courbure négative, appartenant à la même classe d'espaces de Riemann dans lesquels le transport par parallélisme conserve la courbure. L'espace représentatif de leur groupe d'isotropie commun Γ n'est autre que V (ou V' qui lui est applicable). On a ici

$$n = \frac{v^2 + v - 2}{2}, \quad r = \frac{v(v-1)}{2}.$$

Le groupe d'isotropie est ici celui qui indique comment les n composantes x_{ij} ($i, j = 1, \dots, v$) d'un tenseur symétrique arbitraire (dont on suppose le tenseur contracté x_i^i nul) sont transformées par une rotation arbitraire.

Les indications précédentes suffisent pour montrer les services que peuvent se rendre mutuellement la Géométrie et la théorie des groupes dans des problèmes qui semblent tout à fait étrangers à l'une de ces disciplines.

Matematica. — *Sulle irregolarità delle funzioni armoniche.* Nota di M. PICONE, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle equazioni per la rappresentabilità conforme di una varietà a tre dimensioni sullo spazio euclideo.* Nota di A. TONOLO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sull'impossibilità di risolvere parametricamente per radicali un'equazione algebrica a moduli generali.* Nota di O. ZARISKI, presentata dal Socio F. ENRIQUES.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sopra una classe di sistemi anolonomi.* Nota di G. VRANCEANU, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una mia nota pubblicata in questi Rendiconti ⁽²⁾, ho avuto occasione di occuparmi della stabilità delle soluzioni stazionarie di un disco circolare pesante, che rotola senza strisciare su un piano orizzontale, applicando a tale riguardo un teorema di Weierstrass, a cui io ho dato forma conveniente a questo genere di questioni ⁽³⁾.

Mi propongo in questa nota di indicare una classe di problemi dinamici, alla quale è applicabile il nostro metodo per lo studio della stabilità delle loro soluzioni stazionarie.

1. Sia dato un sistema materiale a legami indipendenti dal tempo, la cui posizione rimane individuata dai valori di $n + 1$ coordinate $\theta, q_1, q_2, \dots, q_n$, fra le quali passano $n - \nu$ relazioni, (che possiamo supporre non integrabili), della forma

$$\sum_{i=0}^n \varphi_{ij} q'_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n - \nu),$$

dove abbiamo posto per uniformità di scrittura

$$\theta = q'_0.$$

Queste equazioni permettono di ricavare le q' in funzioni lineari di $\nu + 1$ parametri indipendenti e :

$$(1) \quad q'_i = \sum_b E_{ib} e_b \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Supponiamo adesso che il nostro sistema abbia le proprietà seguenti:

a) La sua forza viva T dipende esplicitamente della sola coordinata di posizione θ e il sistema è sottoposto a sollecitazione conservativa derivante da un potenziale U , funzione anch'esso della sola θ .

b) I coefficienti E nelle formule (1) sono pure funzioni soltanto di θ .

c) Il sistema materiale, pur tenendo conto dei vincoli anolonomi (1), ammette uno spostamento virtuale secondo θ , cioè uno spostamento per cui si annullano tutte le δq_i ($i = 1, 2, \dots, n$), mentre $\delta q_0 = \delta \theta$ è una infinitesima arbitraria.

(1) Presentata nella seduta dell'11 aprile 1926.

(2) *Sulla stabilità del rotolamento di un disco*, vol. XXXIII, 1924, pp. 383-88.

(3) *Sul teorema di Weierstrass*, questi « Rendiconti », vol. XXXIII, 1924, pp. 270-74.

Ciò premesso, vogliamo indicare una forma semplice alla quale si riducono le equazioni del moto del sistema.

Scriviamo intanto l'integrale delle forze vive sotto la forma

$$T = \frac{1}{2} (a_{00} q_0'^2 + 2 q_0' \sum_i^n a_{0i} q_i' + \sum_{i,j}^n a_{ij} q_i' q_j') = U(\theta) + b \quad (b \text{ costante}).$$

Se i coefficienti a_{0i} ($i > 0$) non sono tutti nulli si possono rendere tali, con una trasformazione del tipo

$$q_b = q_b^* + f_b(\theta) \quad (b = 1, 2, \dots, n),$$

bastando all'uopo determinare le $f_b(\theta)$ in base alle formule

$$f_b'(\theta) = - \sum_i^n a_{0i} a^{(ib)},$$

dove le $a^{(ib)}$ sono i complementi algebrici di a_{ib} nel determinante $a = \| a_{ib} \|$ di T , divisi per a , che è diverso da 0, dato che T è una forma quadratica definita positiva.

Possiamo così ritenere senz'altro che la forza viva abbia la forma

$$(2) \quad T = \frac{1}{2} (a_{00} q_0'^2 + \sum_{i,j}^n a_{ij} q_i' q_j')$$

con coefficienti dipendenti dalla sola θ .

Ricorrendo all'interpretazione geometrica, si è spontaneamente condotti, come mi ha fatto vedere il prof. Levi-Civita, a cambiare i parametri e delle eq. (1), in modo da attribuire loro una forma particolarmente indicata per la trattazione del moto. Vi si perviene, considerando una varietà metrica ausiliaria V_{n+1} , il cui ds^2 sia definito da

$$(3) \quad ds^2 = 2 T dt^2 + a_{00} dq_0^2 + \sum_{i,j}^n a_{ij} dq_i dq_j.$$

Le formule (1) (in cui le e si riguardino arbitrarie) esprimono che gli spostamenti possibili del punto di coordinate q , (rappresentativo del sistema materiale), seguono in tutte e sole le direzioni di una certa varietà lineare W_{v+1} . Questa può ritenersi individuata da $v+1$ sue direzioni qualunque purché indipendenti fra loro.

Nell'originaria forma (1), ove si assumano successivamente tutte le e eguali a zero salvo la prima, la seconda, ecc., si presentano come tali le direzioni cui corrispondono incrementi delle q_i proporzionali a E_{i1} , E_{i2} , ecc.

rispettivamente. Possiamo introdurre i parametri ⁽¹⁾ delle corrispondenti direzioni scrivendo le (1) sotto la forma

$$(4) \quad q'_i = \sum_b^v \frac{E_{ib}}{\rho_b} e_b \rho_b = \sum_b^v \lambda_b^i u_b \quad (\lambda_b^i = \frac{E_{ib}}{\rho_b}, \quad u_b = e_b \rho_b)$$

e prendendo le ρ_b in modo che risulti

$$\sum_{ij}^n a_{ij} \lambda_b^i \lambda_b^j = 1,$$

il che equivale a

$$(5) \quad \rho_b^2 = \sum_{ij}^n a_{ij} E_{ib} E_{jb} = 1.$$

Dopo queste osservazioni di indole generale, giova tener conto della condizione c), la quale consente di riguardare come una delle direzioni di W_{v+1} , e in particolare anche come direzione di parametri λ_o^i , quella secondo cui varia la sola θ , con che

$$(4') \quad \lambda_o^i = 0, \quad i > 0.$$

Prendiamo, come è pur lecito, le altre direzioni λ_b^i ($b > 0$) ortogonali alla (4') e tra di loro. Avremo

$$(5') \quad \sum_{ij}^n a_{ij} \lambda_b^i \lambda_b^j = \begin{cases} 0 & \text{per } b \neq k \\ 1 & \text{» } b = k \end{cases}$$

da cui in particolare per $k = 0$, tenendo conto che $\lambda_o^i = 0$, $a_{oi} = 0$ per $i > 0$, si trae

$$(4'') \quad \lambda_b^0 = 0, \quad b > 0.$$

In virtù delle (4') e (4'') le formule (4) assumano la forma

$$(6) \quad \begin{cases} q'_0 = \lambda_o^0 u_0 = \theta' \\ q'_i = \sum_b^v \lambda_b^i u_b, \end{cases}$$

figurando quali caratteristiche dell'atto di moto la θ' e le u_b ($b = 1, 2, \dots, v$). L'integrale delle forze vive nelle variabili u assume la forma che può dirsi canonica

$$(7) \quad T_1 = \frac{1}{2} \left(a_{00} \theta'^2 + \sum_b^v u_b^2 \right) = U(\theta) + h.$$

(1) Cfr. p. es. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* (Roma, Alberto Stock, 1925), pp. 108, 139, 146.

2. Possiamo adesso scrivere le equazioni del moto sotto la forma espressiva del Maggi ⁽¹⁾

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_x}{\partial u_b} = \sum_i^n \frac{d\lambda_b^i}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i} \end{array} \right. \quad (b = 1, 2, \dots, \nu),$$

dove la prima non è altro che l'equazione di Lagrange rispetto a θ , come era da aspettarsi data la forma delle (6). Le eq. (8) servono a determinare la θ e le u in funzione di t ; potendosi poi ricavare le q_i dalle formule (6) con semplici quadrature.

Tenuto conto di questo, si può dire che il problema è essenzialmente compendiato nelle eq. (8), o, assumendo al posto della prima eq. (8) l'integrale delle forze vive (7), possiamo riguardare come equazioni fondamentali le ultime ν eq. (8), cui si associa la (7). Osservando che

$$\frac{d\lambda_b^i}{dt} = \frac{d\lambda_b^i}{d\theta} \theta'$$

e tenendo conto delle (6), le ultime ν eq. (8) si possono scrivere

$$(9) \quad \frac{du_b}{dt} = \theta' \sum_k^\nu b_{kb} u_k \quad (b = 1, 2, \dots, \nu),$$

dove i coefficienti b sono funzioni solo di θ , fornite dalle formule

$$b_{kb} = \sum_{ij}^n a_{ij} \lambda_k^i \frac{d\lambda_b^j}{d\theta}.$$

Se per un dato intervallo di tempo, θ non è costante, possiamo (almeno nell'intervallo in cui $\theta' \neq 0$) dividere le eq. (9) per θ' .

Otteniamo così le equazioni

$$(10) \quad \frac{du_b}{d\theta} = \sum_k^\nu b_{kb} u_k,$$

che sono atte a definire le u come funzioni olomorfe di θ nel campo di regolarità dei coefficienti b .

Introducendo ulteriormente questi valori nella forza viva (7), si ricava θ in termini del tempo con una quadratura.

(1) Di alcune nuove forme delle equazioni della Dinamica applicabili ai sistemi anolonomi, «Rendiconti della Acc. dei Lincei», vol. X, 1901, p. 291.

Si può pertanto concludere che la determinazione del moto dipende essenzialmente dall'integrazione del sistema (10), di v equazioni lineari e omogenee a coefficienti dipendenti da θ .

È interessante osservare che nel caso in cui il sistema è olonomo con $v + 1$ gradi di libertà, e l'integrale delle forze vive dipende solo da θ , le eq. (10) danno luogo a v integrali dei momenti, che permettono di ricavare le v caratteristiche u in funzioni di θ , con la semplice risoluzione di v equazioni lineari.

Siccome in tutte le considerazioni che abbiamo fatto la coordinata di posizione θ apparisce da sola esplicitamente, possiamo chiamare *monotopici* questi sistemi.

I sistemi monotopici si presentano come una generalizzazione dei sistemi a caratteristiche indipendenti studiati dal prof. V. Volterra⁽¹⁾.

3. Si vede ben facilmente che le eq. (9) ammettono le soluzioni stazionarie della forma

$$(11) \quad \theta = c_0, \quad u_b = c_b \quad (b = 1, 2, \dots, v),$$

dove c_0 appartiene al campo di regolarità dei coefficienti b e del potenziale U , e le $v + 1$ costanti c devono soddisfare alla prima eq. (8); o, ciò che è lo stesso, all'equazione delle forze vive, la costante h rimanendo determinata in funzione delle condizioni iniziali, cioè delle c .

Si tratta di studiare la stabilità delle soluzioni (11).

All'uopo poniamo

$$y = \theta - c_0,$$

e prendiamo in considerazione una soluzione generica vicina alle (11), definita dai valori iniziali

$$(11') \quad y' = x, \quad y = x_0, \quad u_b = c_b + x_b,$$

dove le x sono quantità molto piccole e, del resto, qualsivogliano.

In questa soluzione la $y' = \theta'$ non è sempre nulla e possiamo quindi ricavare dalle (10) le u in funzioni olomorfe di y intorno ai valori iniziali (11'). Introducendo questi valori nell'integrale delle forze vive (7), si ottiene una equazione del tipo

$$(12) \quad y'^2 = F(y, x, x_1, \dots, x_v) = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \dots,$$

(1) *Sopra una classe di equazioni dinamiche; Sulla integrazione di una classe di equazioni dinamiche*, « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XXXIII, 1898, pp. 451-475, 542-558.

dove F è una funzione olomorfa nella y e nelle x in un certo campo vicino all'origine. I coefficienti A sono funzioni olomorfe delle x e per le $x = 0$ si ha (per essere $y = 0$ una soluzione stazionaria della (12)),

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0.$$

Per una equazione della forma (12) si ha la proprietà⁽¹⁾.

La condizione necessaria e sufficiente perchè la soluzione stazionaria $y = 0$ sia stabile, è che la F sia massima in y per le $x = 0$. Se $y = 0$ è stabile, ossia se le x variano in un certo campo abbastanza poco discosto dall'origine, y rimane piccola quanto si vuole, e le u , essendo delle funzioni olomorfe nella y , rimangono anche esse piccole quanto si vuole.

Lo stesso vale per le q_i , cui in virtù delle (6), per le soluzioni stazionarie (11), spettano dei valori costanti.

4. La condizione b) del n. 1, che impone ai coefficienti E delle formule (1), di non dipendere che da θ , non è necessaria per far assumere alle equazioni del moto la forma (9). Soltanto, nel caso in cui le E dipendono anche dai parametri q , esse non possono essere più arbitrarie, ma devono soddisfare certe condizioni.

Questo avviene nel caso del disco pesante, rotolante su piano orizzontale, dove se prendiamo come parametri i tre angoli di Eulero θ, φ, ψ , che individuano l'orientazione del disco rispetto ad una terna fissa $\Omega \xi \eta \zeta$, di cui $\Omega \zeta$ è verticale, e $\Omega \xi, \Omega \eta$ appartengono al piano orizzontale di appoggio, nonchè le coordinate ξ, η del centro di gravità del disco, le componenti ξ' ed η' della velocità baricentrale sono (in condizioni di puro rotolamento) definite da⁽²⁾

$$(12') \quad \begin{cases} \xi' - a \sin \psi \sin \theta \theta' + a \cos \psi \cos \theta \psi' + a \cos \psi \varphi' = 0, \\ \eta' + a \cos \psi \sin \theta \theta' + a \sin \psi \cos \theta \psi' + a \sin \psi \varphi' = 0, \end{cases}$$

(a raggio del disco); eppure le eq. del moto rispetto a φ' e ψ' sono della forma (9). Lo stesso si verifica per un solido omogeneo pesante di rivoluzione, che rotola senza strisciare su un piano orizzontale⁽³⁾.

A tutti questi casi si applicano naturalmente le considerazioni sopra svolte, per lo studio della stabilità delle loro soluzioni stazionarie.

(1) Vedasi la mia Nota: *Sul teorema di Dirichlet*, questi «Rendiconti», vol. III, 1926 (in corso di stampa).

(2) Cfr. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, vol. II, ed. II, p. 365, 244.

(3) APPELL, *Développements sur une forme nouvelle des équations de la Dynamique*, «Journal de Mathématiques», vol. VI, 1900, p. 36.

Meccanica. — *Sur les oscillations d'un liquide en vases communicants.* Nota di R. MAZET, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Alcune nuove proprietà della precessione balistica.* Nota di F. BURZIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Sulla teoria delle ombre volanti.* Nota di G. HORN D'ARTURO, presentata dal Socio V. CERULLI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Determinazione astronomica di latitudine e azimut eseguita a Capo Noli nel 1911.* Nota di U. BARBIERI, presentata dal Corrisp. G. LORIA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla trasmissione di calore per irradiazione.* Nota di U. BORDONI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio CORBINO.

1. Il calcolo della trasmissione di calore raggiante fra un corpo e l'ambiente circostante (cioè, della differenza fra l'energia raggiante effettivamente emessa dal corpo e quella contemporaneamente ricevuta; a questa differenza converrebbe meglio il nome di *emissione apparente*) viene fatto, per piccoli intervalli di temperatura, con una delle note relazioni approssimate:

$$(1) \quad Q = m S (T_1 - T_2)$$

$$(2) \quad Q = m [1 + \alpha (T_1 - T_2)] S (T_1 - T_2)$$

(m ed α si intendono costanti; gli altri simboli hanno significato ovvio) la seconda delle quali rappresenta un tentativo empirico di correggere l'ecces-

(1) Nella seduta dell'11 aprile 1926.

sivo scarto fra i risultati forniti dalla (1) e quelli dell'esperienza. Per intervalli di temperatura maggiori viene comunemente adoperata, *ritenendola come esatta*, la relazione seguente, ispirata dalla legge di Stefan:

$$(3) \quad Q = \sigma S (T_1^4 - T_2^4).$$

Non è mancato qualche tentativo (Nusselt, Wamsler, ecc.), di vedere che cosa veramente derivasse dall'applicazione d'una legge d'emissione del tipo di quella di Stefan; ma i tentativi noti allo scrivente sono tutti affatto incompleti, nel senso che non sono mai precisate le condizioni alle quali è subordinata la validità od il grado d'approssimazione delle varie relazioni; e qualcuno di essi contiene addirittura delle conclusioni errate.

Scopo della presente Nota è perciò quello di esaminare, in alcuni casi tipici, quale sia la forma delle relazioni adoperabili, quali ipotesi implichi il loro impiego ed a quale approssimazione esse conducano; in guisa, cioè, da precisare il campo d'applicazione di ciascun tipo di relazione. Senza anticipare le conclusioni, gioverà rilevare fin d'ora che da questo esame risulta, fra altro, che la (3) non è nè esatta, nè molto generale; e che, malgrado l'uso comune, non v'è alcuna ragione seria di adoperare la (2), essendo di gran lunga più vantaggioso l'impiego, con qualche accorgimento, della (1).

2. Fra le varie relazioni con le quali si è cercato di rappresentare la entità dell'energia raggiante che le superficie, specie non speculari, emettono (supposta nulla la ricezione d'energia da parte di altri corpi), la più vicina alla realtà è del tipo della legge di Stefan:

$$(4) \quad Q = \sigma S T^4$$

purchè si dia a σ un valore conveniente, minore di quello che spetta al corpo nero ($\sigma_0 = 5,7 \cdot 10^{-12}$; esprimendo Q in watt per cm^2). L'intervallo di temperatura in cui la (4) è in buon accordo con l'esperienza è variabile con la natura della superficie emittente; fra le circostanze che più influiscono, importantissima è quella, inevitabile, relativa alle alterazioni, temporanee o permanenti, che le ordinarie superficie subiscono allorchè vengono scaldate (anche a temperature mediocrementemente alte). Ad ogni modo, l'esperienza diretta ha mostrato che la (4) può rappresentare la emissione di molte delle comuni superficie con una approssimazione che si mantiene di pochissime unità per cento entro intervalli di temperatura che giungono a qualche centinaio di gradi; che, anzi, σ ha per i diversi corpi valori meno differenti di quanto si potrebbe attendere. Così (Wamsler), per tutte le superficie metalliche usuali (ferro, ghisa, rame, piombo, zinco, ecc.) *greggie* od *ossidate*, σ avrebbe il valore praticamente comune di $5,1 \cdot 10^{-12}$ (esprimendo Q in watt per cm^2) fra 0°C. e 350°C. ; per tutte le superficie di impasti del tipo del calcestruzzo, del cemento, del gesso, per le superficie delle tinteg-

giature, ecc. σ avrebbe il valore praticamente comune di $5,0 \cdot 10^{-12}$, pressochè indipendentemente dal colore della superficie ⁽¹⁾, almeno fra 0° e 100° C.; per il rame levigato $\sigma = 0,93 \cdot 10^{-12}$; e così via.

3. Il caso più generale relativo agli scambi d'energia è quello che il corpo che si considera sia circondato da altri corpi, i quali emettano anche essi; *che, cioè, la superficie chiusa emittente I, sia completamente circondata da un'altra superficie emittente chiusa II*. L'entità della emissione apparente della I potrà allora calcolarsi come segue.

La energia che I emette nella unità di tempo andrà tutta ad investire II, la quale ne rinverrà una certa frazione; ma di questa frazione soltanto una parte investirà I, chè il resto colpirà altre parti di II. Allora I assorbirà una parte di ciò che riceve e rinverrà il resto; il quale, unitamente all'altro resto, verrà nuovamente rimesso parzialmente in circolazione da II, e così di seguito. Si potrà allora determinare quale parte (somma di frazioni decrescenti), della energia da lui stesso emessa, il corpo I finirà con l'assorbire per effetto dei rinvii dovuti a II. Ma anche II emette, in ogni unità di tempo, dell'energia, una parte della quale andrà necessariamente ad investire I; ed applicando a questa energia lo stesso schema di ragionamento di cui sopra, si potrà calcolare quale parte (somma anch'essa di frazioni decrescenti) di essa finirà con l'essere realmente assorbita da I. E se allora dalla quantità di energia effettivamente emessa da I in ogni unità di tempo si tolgono quelle contemporaneamente assorbite (e che saranno parte di quella da lui stesso emessa, e parte di quella emessa da II), per effetto dei rinvii fra le due superficie, si otterrà la entità cercata della emissione apparente.

Ove non si facciano ipotesi semplificatrici sulla natura e le condizioni delle due superficie, il calcolo precedente riuscirà assai complicato, od addirittura impossibile. Si facciano perciò le ipotesi seguenti, delle quali si discuterà poi quello che si potrebbe chiamare il « grado reale di restrittività »:

a) Che le superficie I e II abbiano *proprietà uniformi* e siano in *condizioni fisiche uniformi* in tutta la loro estensione; siano rispettivamente T_1, T_2 le temp. ass., σ_1, σ_2 le costanti d'irradimento, S_1, S_2 le aree.

b) Che esse si comportino come « corpi grigi », cioè che abbiano dei coefficienti di assorbimento a_1, a_2 *indipendenti della lunghezza d'onda λ* ; si avrà, notoriamente:

$$a_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}; \quad a_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0}.$$

(1) Questo significa che se diverso è il comportamento delle varie superficie nei riguardi delle radiazioni visibili, le differenze diventano insignificanti per le radiazioni ultrarosse, che sono quelle alle quali corrisponde, per temperature non altissime, la massima parte dell'energia raggiante emessa.

c) Che, rispetto la emissione d'energia, ogni elemento delle due superficie si comporti come « *diffondente perfetto* »; cioè, segua la legge di Lambert.

d) Che il fluido interposto fra le due superficie abbia un *coefficiente nullo di assorbimento*.

e) Che, infine, la forma e la posizione delle superficie soddisfi a condizioni che verranno discusse in seguito, tali da rendere verificate le circostanze seguenti: 1) che, detto φ_2 il coefficiente (< 1) il quale esprime quale parte dell'energia emessa (o rinviata) da II vada ad investire I, questo coefficiente rimanga *costante* in tutte le successive emissioni o rinvii; 2) che si abbia inoltre $\varphi_2 = \frac{S_1}{S_2}$.

Mediante l'impiego di queste ipotesi, la emissione apparente d'una superficie I (a temp. T_1) circondata da un'altra superficie chiusa II (a temp. T_2), calcolato col procedimento sopra indicato, assume la forma, ben diversa dalla (3):

$$(5) \quad Q = S_1 \frac{T_1^4 - T_2^4}{\frac{1}{\sigma_1} + \varphi_2 \left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_0} \right)}.$$

La emissione apparente della superficie II è ovviamente eguale e di segno contrario.

Ove si trattasse di due superficie *vicinissime* (tanto da poter ritenere che gli altri corpi circostanti non intervengano negli scambi d'energia) si giungerebbe egualmente alla (5), anche se una delle due non avviluppassse interamente l'altra; il caso poi in cui le due superficie avessero eguale area, si dedurrebbe dalla (5) facendo $\varphi_2 = 1$.

4. Le condizioni alle quali corrisponde la ipotesi e) del paragrafo precedente risultano implicitamente dalle considerazioni seguenti, che conducono alla relazione $\varphi_2 = \frac{S_1}{S_2}$.

Si considerino due superficie I, II irradianti l'una verso l'altra in conformità delle ipotesi di cui in a), b), c), d); senza bisogno, per altro, che l'una circondi l'altra. La espressione generica del flusso d'energia $d\Phi$ emesso da un elemento dS_1 (appartenente, per esempio, alla I) entro un angolo solido infinitesimo $d\Omega$, il cui asse faccia un angolo α con la normale all'elemento, sarà (in base alla ipotesi c):

$$d\Phi = K dS_1 \cos \alpha d\Omega.$$

Detta dS_2 l'area della II intercettata da questo angolo solido, R la distanza fra dS_1 e dS_2 e β l'angolo che l'asse dell'angolo solido fa con la

normale a) dS_2 , si potrà, esprimendo $d\Omega$ con questi elementi, scrivere:

$$d\Phi = \frac{K dS_1 dS_2 \cos \alpha \cos \beta}{R^2}.$$

E la entità $\Phi_{I, II}$ del flusso che, emesso dalla I, va a colpire la II, sarà espresso da:

$$(6) \quad \Phi_{I, II} = \int_I \int_{II} \frac{K \cos \alpha \cos \beta}{R^2} dS_1 dS_2.$$

Ora, l'intero flusso emesso da ciascun elemento dS_1 ha notoriamente la espressione, nella ipotesi c) fatta: $\pi K dS_1$; per conseguenza, *supposto che K sia costante*, il flusso totale emesso dalla I avrà la espressione $\Phi'_I = \pi K S_1$. Allora, il rapporto φ_1 fra il flusso ricevuto da II (proveniente da I) e quello totale emesso da I sarà dato da:

$$\varphi_1 = \frac{\Phi_{I, II}}{\Phi'_I} = \frac{\int_I \int_{II} \frac{\cos \alpha \cos \beta}{R^2} dS_1 dS_2}{\pi S_1}.$$

Dalla completa simmetria del numeratore dell'ultimo membro rispetto le due superficie, si deduce senz'altro

$$(7) \quad \varphi_1 S_1 = \varphi_2 S_2.$$

Se II avvolgesse completamente I, e quest'ultima non presentasse concavità, si avrebbe $\varphi_1 = 1$, e quindi $\varphi_2 = \frac{S_1}{S_2}$.

5. Le condizioni di cui ai §§ 3-4, *necessarie per giungere alla (5)*, costituiscono certo un insieme estremamente restrittivo (nè v'è bisogno di speciale dimostrazione), se si intende che esse debbano essere tutte *esattamente* verificate. Diversamente deve concludersi, se si esige soltanto che il gruppo delle condizioni sia soddisfatto con una approssimazione complessiva dello stesso ordine di quella presumibile per la equazione fondamentale di partenza, (la (4)), cioè qualche unità per cento; allo stato attuale delle ricerche sperimentali, ricercare una approssimazione notevolmente maggiore non avrebbe significato.

Difatti, la condizione d) è verificata con grandissima approssimazione in quasi tutti i casi che possono presentarsi; soddisfano abbastanza alla c) la grande maggioranza delle superficie comuni *non lucide*⁽¹⁾; importanti indizi inducono a ritenere, nei riguardi della condizione b), che la dipendenza degli

(1) V. BORDONI, *L'illuminazione prodotta dalle superficie diffondenti*. « Atti A. E. I. », 1908.

a da λ , spesso assai notevole per i piccoli valori di λ , sia grandemente minore nell'ultravioletto, che è la regione che più importa. Rimangono le condizioni a) ed e) (e quella del § 4). Ora, anche supposta inizialmente soddisfatta la condizione a), e quindi costante, nella prima emissione diretta (si fa qui riferimento alle considerazioni fatte al principio del § 3) il K di cui nel § 4, se i due corpi I e II hanno forma e posizione qualsiasi, non sarà uniforme la ripartizione dei flussi ricevuti e quindi nemmeno sarà costante il K relativo alle riemissioni parziali di questi flussi; anzi, non solo non sarà soddisfatta la condizione e), ma la ineguale distribuzione dei flussi rinviati tenderà a produrre differenze locali di temperatura sulle due superficie, cioè, a rendere insoddisfatta anche la a). Per altro, alle superficie più comuni (escluse quelle levigate) corrisponde un valore di σ prossimo a quello del corpo nero, cioè un coefficiente di assorbimento alto (per $\sigma_1 = 5 \cdot 10^{-12}$

si ha $a_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = 0,88$); ciò che vuol dire che l'importanza dei successivi rinvii di energia diminuisce assai rapidamente. Alcuni calcoli numerici di scandaglio, che non è qui il caso di esporre minutamente, mostrano che in casi di questo genere, supposta inizialmente soddisfatta la condizione a) con una approssimazione sufficiente (le variazioni locali tollerabili di temperatura sono dell'ordine del mezzo per cento, cioè, per corpi a temperature vicine a quelle usuali, di qualche grado; le temperature T_1 e T_2 dovranno allora essere quelle medie) la condizione di cui in e) ed al § 4 si riducono, essenzialmente, all'avere le due superficie forma non troppo tormentata e posizione non troppo disimmetrica. (Si veggia « L' Elettrotecnica », 1926, p. 216-217).

6. Chiarito a quali condizioni sia correttamente applicabile la (5), ne risulta che ulteriore condizione affinché essa possa essere sostituita dalla (3), è che possa trascurarsi, rispetto $\frac{I}{\sigma_1}$, il termine $\varphi_2 \left(\frac{I}{\sigma_2} - \frac{I}{\sigma_0} \right)$; cioè, che siano sufficientemente piccoli uno o tutti e due i fattori di cui esso si compone. Limitandoci ad un esempio di evidente concreto interesse, si supponga $\sigma_1 = \sigma_2 = 5 \cdot 10^{-12}$; allora $\frac{I}{\sigma_1} = 200 \cdot 10^9$ e $\frac{I}{\sigma_2} - \frac{I}{\sigma_0} = 25 \cdot 10^9$.

Affinchè il termine che si trascura non superi l'1 % dell'altro, occorre che sia $\varphi_2 < 0,08$; ove le due superficie avessero forma tondeggiante e posizione simmetrica, questa condizione sarebbe già soddisfatta (si ricordi la (7)) ove le dimensioni trasversali dell'una fossero dell'ordine di un quarto (o anche meno) di quelle dell'altra. Se la superficie di cui si considera la emissione (la I, nelle (1), (2), (3), (5)) avesse (essa sola) un σ (e quindi un coefficiente di assorbimento) minore, potrebbe tollerarsi ch'essa avesse dimensioni maggiori; così, per $\sigma_1 = 10^{-12}$ (prossimo al σ dei metalli lucidi) basterebbe che fosse $\varphi_2 < 0,4$, cioè, basterebbe che il « diametro » della I non superasse i due terzi di quello dell'altra. Se, viceversa, fosse poco assor-

bente la II, la conclusione sarebbe inversa; per $\sigma_1 = 5 \cdot 10^{-12}$ e $\sigma_2 = 10^{-12}$; occorrerebbe $\varphi_2 < 0,0025$, cioè, che il « diametro » della I non superasse un ventesimo dell'altro.

7. Trovate così le condizioni nelle quali è adoperabile la (3) senza che l'approssimazione sia troppo scarsa, rimane da esaminare a quali *ulteriori* condizioni, *riguardanti per altro le sole temperature*, la (3) sia sostituibile da relazioni di grado minore, quali le (1) e (2).

La (3), quando si suppongano non molto distanti fra di loro le temperature (assolute) T_1 e T_2 e si indichi con T la loro media aritmetica, può scriversi, con grande approssimazione:

$$(8) \quad Q = 4 \sigma_1 T^3 S_r (T_1 - T_2)$$

la quale coincide con la (1) ove si ponga

$$(9) \quad m = 4 \sigma_1 T^3.$$

Ora, se nella (1) il coefficiente m è fissato in base alla (9), l'approssimazione che essa può dare è molto maggiore di quello che potrebbe ritenersi. Così, per T prossimo alle temperature usuali (ai 300° assoluti, circa) le differenze fra i risultati dati dalla (1) e dalla (3) non giungono ancora al 0,7 % quando $T_1 - T_2$ arriva ai 100°; l'errore è dell'1,5 % quando $T_1 - T_2 = 150^\circ$, e così via.

Risultati assai meno favorevoli si hanno quando m si riferisce ad una temperatura diversa dalla media aritmetica fra le temperature estreme (semplici considerazioni geometriche, fondate nell'esame delle traduzioni grafiche delle (1), (2), (3), ne chiariscono la ragione); e l'aggiunta d'un binomio di correzione, come nella (2), non porta, in generale, vantaggi che compensino la maggiore complicazione delle relazioni a cui la (2) dà luogo, come sarebbe facile mostrare con un certo numero di esempi concreti. Difatti, il confronto della (2) con la (3) e la (8) mostra che α è ancora molto sensibilmente funzione di T (si calcola facilmente che per scambi di calore rispettivamente intorno a -20°C. , $+25^\circ \text{C.}$ e $+100^\circ \text{C.}$, il coefficiente α dovrebbe avere i valori 0,006; 0,005; 0,004; e così via; sicchè l'uso della (2) con α costante non può estendersi oltre intervalli di 40° o 50° senza che l'errore si avvicini o superi il 5 %.

Tutto sommato, dunque, e malgrado l'uso comune, allorchè si ritiene di essere in condizioni tali da poter evitare l'impiego della (5) e della (3), la soluzione migliore è costituita dall'impiego della (1), con l'avvertenza essenziale di fissare m in base alla (9). Possono assai facilmente calcolarsi tabelle o costruirsi grafici i quali forniscano il mezzo di determinare immediatamente i valori che deve avere m alle varie temperature medie, quando sia noto il valore di m ad una qualsiasi temperatura conosciuta ⁽¹⁾.

(1) V. BORDONI, *L'Elettrotecnica*. Milano, 1926.

Fisica. — *La polarizzazione rotatoria magnetica in campo alternato.* Nota di E. PERSICO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio CORBINO.

La rotazione del piano di polarizzazione della luce per effetto di un campo magnetico è, come è noto, un fenomeno strettamente connesso all'effetto Zeeman, e del pari connesso a questo effetto è il fenomeno della depolarizzazione magnetica della luce di risonanza scoperto da Wood e Ellet ⁽²⁾. È interessante ricercare comparativamente come si svolgano questi tre fenomeni quando il campo magnetico è rapidamente alternato.

Il fenomeno della risonanza ottica in un campo magnetico alternato è stato studiato sperimentalmente e teoricamente da Fermi e Rasetti ⁽³⁾, i quali hanno trovato che l'effetto depolarizzante del campo è assai diminuito quando il periodo delle alternanze è dell'ordine di grandezza del tempo di smorzamento degli oscillatori risonanti, purchè l'intensità del campo sia tale che il periodo della rotazione di Larmor sia comparabile col detto tempo di smorzamento. Il prof. Corbino ha poi mostrato ⁽⁴⁾ che questo fatto non implica che il fenomeno Zeeman debba risultare diminuito o ritardato per effetto della rapida variazione del campo, anzi ha potuto dimostrare teoricamente in modo assai semplice che l'effetto Zeeman segue con assoluta istantaneità le variazioni del campo, cioè ha in ogni istante l'entità corrispondente al valore istantaneo del campo.

Lo scopo di questa Nota è di mostrare che il terzo degli effetti di cui parliamo, cioè la polarizzazione rotatoria, deve seguire invece le vicissitudini del campo con fedeltà non assoluta, ma praticamente completa (salvo alcune condizioni eccezionali che discuteremo). Le esperienze del prof. Corbino, recentemente pubblicate in questi « Rendiconti » (loc. cit.) mostrano che ciò ha luogo effettivamente fino a frequenze dell'ordine del milione, ma la teoria che ora svolgeremo si applica anche a casi in cui la frequenza del campo è molto più elevata, e fornisce l'inatteso risultato che in certe condizioni l'effetto di un campo alternato è maggiore di quello di un campo costante di uguale intensità.

Supponiamo che un fascio di luce polarizzata circolarmente, di pulsazione ω , si propaghi lungo l'asse z , e siano

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = M e^{i\omega(t - pz)} \\ Y = \pm iX \end{array} \right.$$

(1) Nella seduta dell'11 aprile 1926.

(2) « Proc. Roy. Soc. », A. 103, 1923, p. 396.

(3) « Rend. Linc. », 1, 1925, p. 716.

(4) « Rend. Linc. », 3, 1926, p. 173.

le componenti del vettore elettrico. Il doppio segno si riferisce alla possibilità di due versi di rotazione, e, come si sa, la rotazione del piano di polarizzazione risulterà dalla differenza tra gli indici di rifrazione dei due raggi polarizzati circolarmente in senso inverso. Sia poi H il campo magnetico, diretto secondo z , e funzione di t .

Un oscillatore elettronico investito da questa luce eseguirà delle oscillazioni forzate determinate dalle equazioni

$$(2) \quad \begin{cases} m x'' + r x' + k x = e X - \frac{e H}{c} y' \\ m y'' + r y' + k y = e Y + \frac{e H}{c} x' \end{cases}$$

dove x, y sono le coordinate dell'elettrone, e la sua carica, m la sua massa, ed r e k sono legate alla costante di smorzamento β e alla pulsazione propria ω_0 dell'oscillatore dalle note relazioni

$$(3) \quad m \omega_0^2 = k \quad 2 \beta m = r.$$

Proviamo a soddisfare la (2) ponendo

$$x = P e^{i\omega(t-p\tau)} \quad y = \pm i x$$

dove P è un numero complesso che possiamo scrivere sotto la forma $P_0 + P_1$: P_0 è la parte costante che si avrebbe in assenza di campo magnetico, P_1 rappresenta la perturbazione dovuta al campo ed è quindi variabile col tempo.

Derivando abbiamo successivamente

$$\begin{aligned} x' &= [i\omega(P_0 + P_1) + P_1'] e^{i\omega(t-p\tau)} & y' &= \pm i x' \\ x'' &= [-\omega^2(P_0 + P_1) + 2i\omega P_1' + P_1''] e^{i\omega(t-p\tau)} & y'' &= \pm i x'' \end{aligned}$$

e sostituendo nella prima delle (2) e tenendo conto delle (3)

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta)(P_0 + P_1) + 2(\beta + i\omega)P_1' + P_1'' &= \\ = \frac{e}{m} M \mp \frac{e H}{m c} [-\omega(P_0 + P_1) + i P_1']. \end{aligned}$$

Alla stessa equazione si perverrebbe partendo dalla seconda delle (2) anzichè dalla prima. Separiamo ora la parte dipendente dal campo da quella che non ne dipende, e otteniamo

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta)P_0 = \frac{e}{m} M$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta) P_1 + 2(\beta + i\omega) P'_1 + P''_1 = \mp \frac{eH}{mc} [-\omega(P_0 + P_1) + iP'_1].$$

Dalla prima di queste ricaviamo subito P_0 : separiamo la parte reale dalla immaginaria ponendo $P_0 = a_0 - ib_0$, dopo aver reso reale il denominatore col noto artificio, e otteniamo

$$(4') \quad a_0 = \frac{e}{m} M \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2} \quad b_0 = \frac{e}{m} M \frac{2\omega\beta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}.$$

Queste formule (che ci serviranno in seguito) ci descrivono intanto il movimento in assenza di campo. Per interpretarle, ricorriamo al metodo dei vettori rotanti (v. fig. 1): E rappresenti il vettore elettrico della

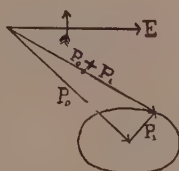


Fig. 1.

luce, che, se prendiamo nelle (1) il segno superiore, supporremo ruotare nel verso della freccia, e P_0 , di componenti $a_0, -b_0$, il vettore congiungente l'elettrone col centro di attrazione (cioè lo spostamento). P_0 ruota nel verso in cui ruota E , restando in arretrato di un angolo la cui tangente è

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Consideriamo ora la seconda delle (4), che ci deve dare P_1 , e osserviamo che nel secondo membro di essa possiamo trascurare P_1, P'_1 , poichè P_1 è assai piccolo rispetto a P_0 : quindi avremo

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta) P_1 + 2(\beta + i\omega) P'_1 + P''_1 = \pm \frac{eH\omega}{mc} P_0.$$

Poniamo ora anche P_1 sotto la forma $a_1 - ib_1$, e separiamo, nella (5), la parte reale dalla parte immaginaria: otterremo le due equazioni

$$(6) \quad \begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2) a_1 + 2\beta a'_1 + a''_1 + 2\omega\beta b_1 + 2\omega b'_1 = \pm \frac{eH\omega}{mc} a_0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2) b_1 + 2\beta b'_1 + b''_1 - 2\omega\beta a_1 - 2\omega a'_1 = \pm \frac{eH\omega}{mc} b_0. \end{cases}$$

Supponiamo ora che il campo magnetico sia alternato, con pulsazione Ω cioè poniamo

$$H = H_0 \cos \Omega t$$

ovvero simbolicamente (convenendo cioè di prendere le sole parti reali)

$$H + H_0 e^{i\Omega t}$$

e cerchiamo le soluzioni delle (6) del tipo

$$a_1 = a_1^0 \cos(\Omega t - \varphi) \quad b_1 = b_1^0 \cos(\Omega t - \psi)$$

ovvero simbolicamente

$$(7) \quad a_1 = A e^{i\Omega t} \quad b_1 = B e^{i\Omega t}$$

dove A e B sono due costanti, in generale complesse. Sostituendo queste espressioni di H , a_1 , b_1 , nelle (6) otteniamo le due equazioni che ci daranno A e B

$$(8) \quad \begin{cases} [(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\beta\Omega] A + 2\omega(\beta + i\Omega) B = \pm \frac{eH_0\omega}{mc} a_0 \\ -2\omega(\beta + i\Omega) A + [(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\beta\Omega] B = \pm \frac{eH_0\omega}{mc} b_0 \end{cases}$$

Converremo di prendere il segno superiore, salvo a tener presente che un cambiamento di verso nella rotazione del vettore luminoso equivale a un cambiamento di segno di H_0 .

Prima di procedere alla risoluzione di queste equazioni fissiamo l'ordine di grandezza delle varie quantità che vi figurano, onde renderci conto delle quantità che potremo trascurare per semplificare le formule. Per ω e ω_0 prenderemo numeri dell'ordine di grandezza $6 \cdot 10^{15}$ (che corrisponde a una lunghezza d'onda di 3000 Å) e supporremo che $|\omega_0 - \omega|$ non scenda al di sotto di $5 \cdot 10^7$ cioè che si osservi una regione dello spettro non più vicina di $3 \cdot 10^{-5}$ Å al centro di una riga di assorbimento, limitazione ampiamente giustificata dalle possibilità pratiche di osservazione. Come ordine di grandezza della costante di smorzamento β assumeremo $0,5 \cdot 10^7$ corrispondente alla riga 2537 del mercurio. Supporremo poi che la pulsazione Ω del campo soddisfi la limitazione $\Omega < (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot 10^{-7}$. Si osservi che, se la frequenza del campo non supera 40 milioni, tale condizione è soddisfatta in tutta la regione spettrale che abbiamo convenuto di considerare: per frequenze più elevate si dovrà escludere dalle nostre considerazioni una striscia spettrale alquanto più larga (ma sempre ristrettissima) intorno alla riga di assorbimento. Non sarebbe difficile del resto dare ai calcoli maggiore generalità, che avrebbe però scarso interesse pratico.

In virtù di queste limitazioni siamo autorizzati a trascurare $4\omega^2\beta^2$ rispetto a $(\omega_0^2 - \omega^2)^2$ nelle (4'). Inoltre, nel risolvere le (8), trascureremo $\beta^2\omega^2$, $\beta^2\Omega^2$, e $\beta\Omega\omega^2$ di fronte a $(\omega_0^2 - \omega^2)^2$. Tenendo presente questo si ottiene, con facili sviluppi

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{e^2 H_0 \omega}{m^2 c} \frac{M}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 4\omega^2 \Omega^2] - 4i\beta\Omega\omega^2 [3(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 4\omega^2 \Omega^2]}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 4\omega^2 \Omega^2]^2} \\ B &= \frac{e^2 H_0 \omega}{m^2 c} \frac{2M}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{2\beta(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + i\Omega[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 4\omega^2 \Omega^2]}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 4\omega^2 \Omega^2]^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Ora possiamo completamente raffigurarci il moto dell'elettone sotto l'azione della luce e del campo magnetico alternato, (v. fig. 1). Quando si introduce il campo magnetico, lo spostamento dell'elettone dalla sua posizione di riposo da P_0 diventa $P_0 + P_1$, e le componenti di P_1 sono a_1 e b_1 date dalle (7), dalle quali si vede che P_1 è un piccolo vettore che possiamo pensare spiccato dall'estremo di P_0 , ruotante con velocità angolare Ω e variabile in modo che il suo estremo descriva rispetto all'estremo di P_0 una ellisse con un asse parallelo a E . La rotazione di P_1 è però assai lenta rispetto a quella di P_0 , quindi l'estremo del vettore $P_0 + P_1$ finisce per descrivere rapidamente un cerchio di raggio lentamente variabile: il moto su questo cerchio non è uniforme, ma possiede una leggera precessione a periodo $\frac{2\pi}{\Omega}$.

In una Nota successiva vedremo le conseguenze ottiche di questo movimento elettronico.

Chimica. — *Sui modelli dell'atomo d'elio.* Nota di U. CRUDELI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica-fisica. — *Affinità dell'atomo neutro di bromo per l'elettrone* ⁽¹⁾. Nota di **GIORGIO PICCARDI**, presentata ⁽²⁾ dal Socio **A. GARBASSO**.

La determinazione dell'affinità elettronica dell'atomo neutro di bromo è del tutto analoga a quella dell'affinità elettronica dell'atomo neutro di iodio, con la differenza, che non è possibile supporre, pel calcolo del numero degli atomi, che tutto il bromo introdotto nella fiamma si trovi allo stato atomico.

Le cause che verosimilmente possono alterare, nel caso nostro, la valutazione del numero degli atomi sono:

- 1) l'incompleta dissociazione del bromo molecolare di bromo atomico;
- 2) la formazione di acido bromidrico fra bromo ed idrogeno liberi nella fiamma.

La prima causa, data l'alta temperatura della fiamma, 2600° ass., è la piccolissima pressione parziale del bromo (pressione che noi possiamo facilmente determinare dalla quantità di bromo introdotto, dai volumi di gas e di ossigeno che vengono fatti reagire nella fiamma e dalla composizione del gas), è praticamente inesistente. Infatti applicando la formula stabilita dal Bodenstein ⁽³⁾ per l'equilibrio $\text{Br}_2 \rightleftharpoons 2 \cdot \text{Br}$:

$$(1) \quad \log. K = \frac{-10100}{T} + 1,75 \cdot \log. T - 4,09 \cdot 10^{-4} \cdot T + 4,726 \cdot 10^{-8} \cdot T^2 + 0,054.$$

$$\text{(dove } K = \frac{p_{\text{Br}^2}}{p_{\text{Br}_2}} = \frac{x^2}{1-x^2} \cdot P \text{ essendo } x \text{ il grado di dissociazione)}$$

si trova per $T = 2600^\circ$ e per P compreso fra $7,5 \cdot 10^{-4}$ e $1,5 \cdot 10^{-3}$ (valori limiti di P a dissociazione nulla ed a dissociazione completa) che la quantità di bromo molecolare presente è compresa fra 0,001 e 0,003 per cento; essa è quindi perfettamente trascurabile pel nostro calcolo.

La seconda causa non può ritenersi, invece, eliminata dal semplice effetto di temperatura, essendo l'acido bromidrico un composto molto stabile; infatti se noi applicassimo la formula stabilita da Bodenstein e Geiger ⁽⁴⁾ per la dissociazione dell'acido bromidrico in idrogeno e bromo molecolari

$$(2) \quad \log. K = \frac{-5223}{T} + 0,553 \cdot \log. T - 2,72$$

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica-fisica della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1926.

(3) M. BODENSTEIN, « Zeitschr. f. Elech. », 22, 338, 1916.

(4) M. BODENSTEIN e A. GEIGER, « Zeitschr. f. phys. Chemie », 49, 70, 1904.

(dove $K = \frac{[H_2] \cdot [Br_2]}{[HBr]^2} = \frac{x^2}{4(1-x)^2}$ dove x è il grado di dissociazione), troveremmo che, nelle condizioni dell'esperienza, l'acido bromidrico subirebbe una dissociazione del 7,13 per cento.

Ora nelle condizioni dell'esperienza, non esiste praticamente bromo molecolare. Noi dobbiamo perciò, invece dell'equilibrio $2 \cdot HBr \rightleftharpoons H_2 + Br_2$, considerare l'equilibrio $2 \cdot HBr \rightleftharpoons H_2 + 2 \cdot Br$.

Noi osserviamo subito che questo equilibrio, a differenza dell'altro dipende dalla pressione. (Noi non considereremo, inoltre, la dissociazione in atomi dell'idrogeno molecolare, dato che essa è trascurabile rispetto a quella del bromo).

Noi possiamo ora determinare la costante K dell'equilibrio considerato, combinando la (1) con la (2); infatti noi troviamo, sommando:

$$\log. K = \frac{-15323}{T} + 2,303 \cdot \log. T - 4,09 \cdot 10^{-4} \cdot T + 4,726 \cdot 10^{-8} \cdot T^2 - 2,666,$$

dove $K = \frac{p_{H_2} \cdot p_{Br^2}}{p_{HBr^2}} = \frac{x^3}{(2+x) \cdot (1-x)^2} \cdot P$ dove x è il grado di dissociazione dell'acido bromidrico.

Calcolando il valore di $\log. K$ per $T = 2600^\circ$ e per P compreso fra $1,5 \cdot 10^{-3}$ e $2,25 \cdot 10^{-3}$ atm. (valori limiti di P a dissociazione nulla e a dissociazione completa) e risalendo da tale valore al grado di dissociazione, noi troviamo che l'acido bromidrico in tali condizioni subisce una dissociazione compresa fra 88,1 e 91,2 per cento; ossia all'incirca del 90 per cento.

Questo valore non può essere che largamente approssimato, dato che non è certo che le formule usate siano valide alla temperatura di 2600° e dato anche che noi abbiamo assai schematizzato il fenomeno, trascurando varie contingenze perturbatrici.

In ogni modo, quello che interessa è l'ordine di grandezza, dovendosi poi considerare, non la costante di equilibrio della reazione di affinità, ma il suo logaritmo.

Per determinare l'affinità dell'atomo neutro di bromo per l'elettrone, noi abbiamo usato lo stesso dispositivo sperimentale e le stesse condizioni di esperienza, che servirono a determinare l'affinità dell'atomo di iodio per l'elettrone⁽¹⁾.

Anche in questo caso noi non abbiamo introdotto nella fiamma direttamente i vapori dell'alogeno, ma quelli di un composto alogenato organico a basso punto di ebollizione, il bromuro di etile, ottenendo in tre diverse esperienze i risultati perfettamente coincidenti fra loro, che qui sotto riportiamo:

(1) Questi « Rendiconti », vol. 3°, fasc. 7.

Num.	Perdita in peso per secondo	Diminuzione corrente	Atomi per secondo	Elettroni per secondo	K
I	$5,32 \cdot 10^{-4}$	5,5	$2,62 \cdot 10^{18}$	$8,59 \cdot 10^{12}$	$2,82 \cdot 10^7$
II	$4,70 \cdot 10^{-4}$	5,3	$2,32 \cdot 10^{18}$	$8,28 \cdot 10^{12}$	$2,90 \cdot 10^7$
III	$5,20 \cdot 10^{-4}$	5,5	$2,57 \cdot 10^{18}$	$8,59 \cdot 10^{12}$	$2,86 \cdot 10^7$

da cui K (medio) = $2,86 \cdot 10^7$; $\log. K$ (medio) = $7,456$.

Il coefficiente angolare della retta delle affinità è $1,98$; per cui:

$$\frac{7,456}{1,98} = 3,76 = U = \text{affinità elettronica espressa in volta.}$$

Esprimendo invece tale affinità in calorie:

$$Q = 3,76 \times 23052 = 86700 \text{ cal.}$$

Questo valore da noi direttamente determinato, concorda perfettamente col valore da altri dedotto per via indiretta mediante dei cicli energetici secondo il metodo di Born⁽¹⁾:

$$Q = 87000 \text{ cal.}$$

Spettroscopia. — *Sulla struttura della riga H_α nella cromosfera solare.* Nota di G. ABETTI, presentata dal Socio VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Primi risultati di nuove ricerche negli affioramenti permiani del bacino del Sozio in Sicilia.* Nota di R. FABIANI, presentata dal Socio G. DAL PIAZ.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Come si modifichi la conduttività elettrica della ghiandola sottomascellare durante la sua attività funzionale.* Nota di E. PESERICO, presentata dal Corrisp. C. FOÀ.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) BORN, « Ber. Deutsch. phys. Ges. », 21, 679, 1919.

Microbiologia. — *Sulla microflora del silò italiano.* Nota di C. GÖRINI, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Botanica. — *Sulla improduttività del pistacchio in Sicilia.* Nota di G. SAVASTANO, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente VOLTERRA ringrazia gli intervenuti ad onorare la memoria del compianto ed illustre Socio senatore GOLGI, di cui il collega prof. MORPURGO legge la commemorazione.

Il prof. Morpurgo ricorda gl'inizi della carriera scientifica del prof. Golgi, e del maestro di lui, prof. Bizzozero; giovani e valenti entrambi, e più giovane il maestro che non l'allievo. L'oratore descrive passo a passo lo svolgersi dell'opera scientifica del Golgi, la cui prima pubblicazione apparve nel 1869; ad essa seguì un lungo periodo di silenzio, di lavoro e di preparazione delle importanti scoperte che al Golgi dovevano dare grandissima fama, e che formano una delle più belle e gloriose pagine della storia della Scienza biologica italiana.

Il dotto ed affettuoso discorso del Socio Morpurgo riscuote, alla fine, gli unanimi assenti dell'uditorio e i ringraziamenti del Presidente.

Il Presidente dà il bentornato al Socio Corrisp. PALAZZO reduce dalla spedizione scientifica per l'osservazione della recente eclisse solare nell'Oltre Giuba. Il prof. Palazzo ringrazia e dà alcune notizie sui risultati ottenuti non solo nella missione per l'eclisse, ma anche nell'altra successiva missione da lui svolta, per incarico del Ministero della Marina, e consistente nei rilievi magnetici nell'ambito delle nostre Colonie dell'Est Africa. Tra i fatti interessanti venuti in luce con queste ultime misure, il prof. Palazzo accenna alla notevole ed inattesa variazione dell'inclinazione magnetica nella zona equatoriale, e che va riferita ad un abbassamento dell'equatore magnetico verso il Sud, nell'Oceano Indiano.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Vengono poscia approvate, per la inserzione nei volumi accademici, le Memorie seguenti:

SEGRE B. « Le piramidi inscritte e circoscritte alle quadriche di S_4 e una notevole configurazione di rette dello spazio ordinario ». CASTELNUOVO (rel.) e SEVERI.

OLIVIERI MANDALÀ E. « Sintesi con l'acido azotidrico ». PARRAVANO (rel.) e PELLIZZARI.

PIAZZA MARIA. « Studio cristallografico di alcuni cristalli di Euclase del Brasile ». ZAMBONINI (rel.) e MILLOSEVICH.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio LEVI-CIVITA presenta in omaggio, per incarico dell'autore, il Corrisp. C. GUIDI, la 2^a edizione del volume intitolato: « Statica delle dighe per laghi artificiali », segnalando all'Accademia le notevoli modificazioni che, in occasione della ristampa, vi ha apportato l'Autore.

Si tratta da un lato di perfezionamenti e complementi teorici, dall'altro di vere e proprie aggiunte intese a render conto delle più recenti opere del genere, costruite in Europa ed in America, nonchè dei nuovi regolamenti italiani sulle dighe di ritenuta.

Il Segretario CASTELNUOVO presenta le pubblicazioni giunte in dono, di cui sarà dato l'elenco nel bollettino bibliografico; e fra queste menziona un Trattato di medicina tropicale del Corrisp. A. CASTELLANI. Presenta inoltre un volume pubblicato per celebrare il centenario (1815-1915) della Università di Oslo; un altro volume intitolato: « Marine structures, their deterioration and preservation », edito per cura del Consiglio di Ricerche americano; e l'opera di WILSON TAYLOR: « A new view of surface forces ». Lo stesso Segretario fa inoltre omaggio del vol. I della seconda edizione del suo trattato del « Calcolo delle probabilità » e ne dà notizia.

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 maggio 1926.

- AGAMENNONE G. — La problematica previsione dei terremoti (Estr. dalla Rivista « Terra Sabina ». N. 2, 1926). Roma, 1926. 8°, pp. 1-4.
- ATWOOD W. G. and JOHNSON A. A. — Marine Structures their Deterioration and Preservation. Washington, 1924. 8°, pp. 1-534.
- BRUNO G. — Istogenesi del miocardio ed origine dei capillari e dei sinusoidi nel cuore dell'uomo (Estr. dal « Bollettino della Società di Biologia sperimentale ». Vol. I, fasc. I-II). Torino, 1926. 8°, pp. 1-4.
- BUSACCA E. e CANAVESI G. — Osservazioni su di un caso di coloboma irideo bilaterale in gemelli monoorii (Estr. dal « Bollettino dell' oculista ». Anno IV, n. 8). Firenze, 1925. 8°, pp. 1-16.
- CASTELLANICH and CHALMERS A. J. — Manual of tropical Medicine, III Edition. London, 1919. 8°, pp. 1-X, 1-2436.
- CASTELNUOVO G. — Calcolo delle probabilità. Vol. I, 2ª edizione. Bologna, 1926. 8°, pp. 1-XXXVIII, 1-270.
- EINAUDI M. — Ricerche sulla grandezza cellulare e nucleare e sull' indice plasmatico nucleare nei neoplasmi maligni (Estr. da « La Sperimentale ». Anno LXXX, pp. 77-96). Siena, 1926. 8°.
- FAVARO G. A. — L'attività del sole nell'anno 1925. Catania, 1926. 8°, pp. 1-16.
- GUIDI C. — Statistica delle dighe per laghi artificiali. II edizione. Torino, 1926. 8°, pp. 1-130.
- HOPSTOCK H. — Det Kongelige Frederiks Universitets Anatomiske Institut. 25 januar 1815-23 januar 1915. Christiania, 1915. 8°, pp. 1-259.
- LECAT M. — Coup d'œil sur la théorie de la multiplications des déterminants supérieurs dans son état actuel (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles ». To. XLVI, 1926). Louvain, 1926. 8°, pp. 1-39.
- LECAT M. — Déterminants arithmétiquement progressifs (Extr. from « Messenger of Mathematics ». Vol. LIV, pp. 174-175). S. 1., 1925. 8°.
- LECAT M. — Permanent composé des déterminants d'une matrice (Extr. from « Messenger of Mathematics ». Vol. LIV, pp. 172-173). S. 1., 1925. 8°.
- LECAT M. — Quelques propriétés des déterminants supérieurs, orthosymétriques, circulants et cycliques (Sonderbd. aus « Mathematische Zeitschrift ». Band XXV, pp. 121-131). Berlin, 1926. 8°.
- LECAT M. — Recherches diverses sur les déterminants supérieurs (Extrait des « Annales de la Société Scientifique de Bruxelles ». Pp. 209-220). Louvain, 1925. 8°.
- LECAT M. — Sur les déterminants d'éléments x, y et o (Estr. dai « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ». Vol. XLIX, 1925). Palermo, 1925. 8°, pp. 1-5.
- LECAT M. — Sur les déterminants symétriques gauches à n dimensions (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles ». To. XLIV, pp. 471-476). Louvain, 1925. 8°.

- LEVI G. — La structure du cytoplasme des cellules des métazoaires (Extrait des « Comptes Rendus de l'Association des Anatomistes »). Paris, 1925. 8°, pp. 1-17.
- MOSSA S. — Proprietà ottiche delle fibre nervose cresciute « in vitro » all'osservazione in campo oscuro (Estratto dal « Bollettino della Società di Biologia sperimentale »). Vol. I. fasc. I-II). Torino, 1926. 8°, pp. 1-3.
- OLIVIERO O. — Sui caratteri morfologici di un ceppo di elementi del miocardio embrionale di pollo, coltivati « in vitro » per sei mesi (Estr. dal « Monitore Zoologico Italiano ». Anno XXXVI, pp. 171-175). Siena, 1925. 8°.
- OLIVO O. — Di alcuni caratteri fisici e chimici del corpo glicogenico del midollo lombo-sacrale degli uccelli (Estr. dal « Bollettino della Società di Biologia sperimentale »). Vol. I, fasc. I-II). Torino, 1926. 8°, pp. 1-4.
- OLIVO O. — Sulla migrazione di neuroblasti coltivati « in vitro » (Estr. dal « Bollettino della Società di Biologia sperimentale »). Vol. I, fasc. I-II). Torino, 1926. 8°, pp. 1-3.
- OLIVO O. — Sulle modificazioni delle cellule coltivate « in vitro » nelle varie fasi della loro vita (Extrait des « Comptes Rendus de l'Association des Anatomistes ». XX^e réunion, 1925). Paris, 1925, 8°, pp. 1-4.
- OLIVO O. — Sull'istituirsi della sincronicità tra le pulsazioni di frammenti di cuore embrionale di pollo e di Colombo, coltivati insieme « in vitro » (Abdruck aus « Archiv für experimentelle Zellforschung ». Band II, pp. 191-204). Jena, 1925. 8°.
- PETERFI T. e OLIVO O. — Ricerche di microdissezione su cellule somatiche coltivate « in vitro » (Extrait des « Comptes Rendus de l'Association des Anatomistes ». XX^e réunion, Turin, 6-8 avril 1925). Paris, 1925. 8°, pp. 1-4.
- RUSO A. — Studi sulla pesca nel Golfo di Catania. (Estr. dal « Bollettino di pesca, di piscicoltura e di idrobiologia ». Anno I, fasc. II). Roma, 1925. 8°, pp. 1-55.
- SCHROETER F. J. — Sonnenfinsternisse von 600 bis 1800 n. Chr. Kristiania, 1923. 8°, pp. I-XXIV, 1-305, I-CL.
- TANZI E. — Ricerche sperimentali sovra elementi nervosi sviluppati « in vitro » (Estr. da « Studi Neurologici », pp. 113-130). Torino, 1926. 8°.
- VOLANTE F. — Innervazione della vescica urinaria (Estr. dal « Monitore Zoologico Italiano ». Anno XXXVII, pp. 46-54). Siena, 1926. 8°.
- WILSON TAYLOR B. A. — A New Kiew of Surface Forces. Toronto, 1925. 8°, pp. 1-240.

G. C.